



Ana Pinto Coutinho
Licenciada em Ciências da Engenharia

Elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas de temperatura em regime transitório

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Civil - Perfil de Estruturas

Orientador: Professor Doutor Dragoș Ionuț Moldovan , UL - IST
Co-orientador: Professora Doutora Ildi Cismașiu, UNL - FCT

Júri:

Presidente: Professor Doutor Nuno Manuel da Costa Guerra
Arguente: Professor Doutor Corneliu Cismașiu
Vogal: Professor Doutor Dragoș Ionuț Moldovan



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Outubro de 2017

“Copyright” Ana Pinto Coutinho, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Quero agradecer ao meu orientador Professor Ionuț Moldovan por toda a aprendizagem adquirida durante o desenvolvimento desta dissertação. Agradeço a paciência e a orientação no tema dos elementos finitos, que é muito abrangente e interessante. Graças à sua ajuda e influência, este trabalho aumentou o meu gosto pelos métodos de aproximação utilizados e pela programação.

Agradeço a minha co-orientadora Professora Ildi Cismașiu pela ajuda oferecida durante a escrita deste documento e também pela oportunidade, disponibilidade e esclarecimentos dados.

Quero agradecer à minha família, António Coutinho, Fátima Coutinho, Maria do Carmo Pinto e Rita Costa, principalmente os comentários que me ajudaram a entender outras perspectivas em relação a conceitos e outras informações deste trabalho.

Dou muito valor a todos os meus amigos da faculdade que me ajudaram e me motivaram quando mais precisei, Catarina Araújo, Ema Barradas, Daniel Pereira, Glória Mendonça, Jorge Lopes, Sara Jerónimo e André Ramião. Agradeço também pela ajuda na concentração durante o meu percurso académico e mais ainda, durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Este documento desenvolve o modelo de temperatura dos elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas transitórios de transferência de calor por condução.

O objectivo dos elementos finitos híbridos-Trefftz é combinar as características favoráveis dos elementos finitos e dos métodos de elementos de fronteira. Um traço semelhante aos elementos concebidos anteriormente é a subdivisão do domínio em elementos finitos, onde soluções complexas podem ser facilmente aproximadas com funções de aproximação regulares e sistemas resolutivos Hermitianos, esparsos e localizados. Por outro lado, tal como os métodos de elementos de fronteira, as funções de aproximação têm significado físico construído nas soluções diferenciais homogêneas que governam o problema. Esta opção reduz a formulação no domínio para as fronteiras dos elementos, aumenta consideravelmente a sua convergência com o refinamento p , das ordens das bases de aproximação, e aumenta a robustez à distorção de malha e altos gradientes da solução. Estes problemas são típicos na propagação de calor transitória em elementos estruturais de forma complexa, o que torna as formulações híbridas-Trefftz ideais para a modelação nesta classe de problemas.

As equações diferenciais governativas começam por ser discretizadas no tempo, usando o método do ponto médio (*mid-point time-stepping scheme*), e depois são decompostas em séries de equações com variáveis no espaço apenas. O campo de temperatura é aproximado no domínio dos elementos, usando as bases de aproximação distintas para a solução complementar e para a solução particular. A base da solução complementar satisfaz a forma homogênea da equação diferencial que governa o problema. No entanto, geralmente não existem soluções para a forma não homogênea desta equação, sendo aproximadas usando o novo método da reciprocidade dual. Nas variantes típicas deste método, a base da solução particular apresenta expressões complicadas e, por vezes, singulares. Por outro lado, no texto aqui apresentados, a base da solução particular é simples na forma e não precisa de ser singular.

Independente da aproximação da temperatura no domínio dos elementos, o fluxo normal de calor é aproximado nas fronteiras essenciais da malha. A base de aproximação dos fluxos de calor pode ser construída em qualquer espaço de funções completo e linearmente independente, sendo as funções polinomiais de Chebyshev as usadas neste trabalho. Tanto as aproximações da temperatura e do fluxo de calor são apresentadas como altamente convergentes, especialmente sob refinamento p , e

relativamente robustas perante distorções da malha.

A formulação híbrida-Trefftz aqui descrita é implementada na plataforma *FreeHyTE*, um software público, de código aberto e de fácil utilização. Esta plataforma resolve problemas de valores de fronteiras, usando elementos finitos híbridos-Trefftz. Para auxiliar os utilizadores, *FreeHyTE* providencia os procedimentos padrão para todas as fases do algoritmo, incluindo a entrada de dados, a construção e manipulação do sistema resolutivo e o pós-processamento dos resultados. A distribuição da plataforma é gratuita segundo os termos da licença pública geral GNU e suportada pelos manuais de teoria, instalação, utilização e desenvolvimento para iniciar facilmente os novos utilizadores.

Palavras chave:

Método dos elementos finitos,
Problemas de transferência de calor,
Elementos finitos híbridos-Trefftz,
Modelação dinâmica de Temperatura.

Abstract

This document reports the development of the temperature model of the hybrid-Trefftz finite elements for transient heat conduction problems.

Hybrid-Trefftz finite elements are aimed at combining favourable traits of the finite and boundary elements methods. Similar to the former, they feature the subdivision of the domain into finite elements, where complex solutions can be more easily approximated by regular functions, and Hermitian, sparse and localized solving systems. On the other hand, and similar to the boundary elements, they feature physically meaningful approximations bases, built on the (homogeneous) solutions of the differential equation governing the problem. This option reduces the formulation to the boundaries of the elements, considerably enhances their convergence under basis (p-) refinement, and increases their robustness to mesh distortion and high gradients of the solution. Such issues are typical to transient heat propagation in structural elements of complex shapes, which renders hybrid-Trefftz formulations ideally suited for modelling this class of problems.

The governing differential equations are first discretized in time using a generalized mid-point time-stepping scheme. This leads to the decomposition of the original equations in time and space into a series of equations in space variables only, which are subsequently solved using the hybrid-Trefftz elements. The temperature field is approximated in the domain of the elements, using distinct bases for the complementary and particular solutions. The complementary solution basis satisfies exactly the homogeneous form of the differential equation governing the problem. However, exact solutions of the non-homogeneous form of that equation do not exist, in general, and are approximated using a novel form of the Dual Reciprocity Method. In typical variants of the Dual Reciprocity Method, the particular solution basis generally presents complicated (and, sometimes, singular) expressions. Conversely, in the method presented here, the particular solution basis is simple in form and need not be singular.

Independently of the temperature approximation in the domain of the elements, the normal heat flux is approximated on the essential boundaries of the mesh. The heat flux basis can be built on any (complete and linearly-independent) function space. Chebyshev polynomials are used in this work. Both temperature and heat flux approximations are shown to be highly convergent, especially under p-refinement, and relatively robust to mesh distortion.

The hybrid-Trefftz formulation described here is implemented into the computational framework FreeHyTE. FreeHyTE is a public, open-source and user-friendly software for the solution of initial boundary value problems using hybrid-Trefftz finite elements. To support users, FreeHyTE features intuitive graphical interfaces and automatic mesh generators. To support developers, FreeHyTE provides standardized procedures in all phases of the algorithm, including data input, construction and manipulation of the solving system, and post-processing of the results. FreeHyTE's distribution is free under the terms of the GNU General Public License and supported by theory, installation, user's and developer's manuals to quickly get new users and developers started.

Keywords:

Finite elements method,
Dynamic heat conduction problems,
Hybrid-Trefftz finite elements,
Temperature Modeling.

Índice de Matérias

Copyright	i
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice de Figuras	xiii
Índice de Tabelas	xv
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação e enquadramento do tema	1
1.2 Descrição dos elementos finitos híbridos-Trefftz	2
1.2.1 Elementos finitos híbridos-Trefftz e elementos convencionais .	2
1.2.2 Vantagens e desvantagens dos EFHT	4
1.3 Estado da arte	5
1.3.1 Elementos finitos híbridos-Trefftz	5
1.3.2 Método da reciprocidade dual	6
1.3.3 Plataforma computacional <i>FreeHyTE</i>	8
1.4 Organização do trabalho	9
2 Definição do problema	11
2.1 Condução	11
2.2 Convecção	12
2.3 Radiação	13
2.4 Definição do problema a resolver	14
2.4.1 Hipóteses simplificativas	14
2.4.2 Equações no domínio	14
2.4.3 Condições iniciais e de fronteira	16
3 Discretização no tempo	19
3.1 Introdução	19
3.2 Formulação da equação de Navier no passo de tempo	19
3.3 Estabilidade do esquema de discretização no tempo	21

4	Formulações	27
4.1	Elementos finitos híbridos-Trefftz para o problema homogéneo	27
4.1.1	Introdução	27
4.1.2	Discretização no espaço	27
4.1.3	Bases de aproximação	28
4.1.4	Equações no domínio	30
4.1.5	Equações na fronteira	31
4.1.6	Sistema governativo	32
4.1.7	Indeterminação estática e cinemática	32
4.2	Elementos finitos híbridos-Trefftz para o problema não-homogéneo .	33
4.2.1	Objectivo	33
4.2.2	Aproximações	34
4.2.3	Solução particular	34
4.2.4	Solução complementar	37
5	Implementação dos elementos finitos híbridos-Trefftz	41
5.1	Introdução	41
5.2	Solução homogénea	42
5.2.1	Pré-processamento	42
5.2.2	Processamento	44
5.2.3	Solução do sistema resolutivo	45
5.2.4	Pós-processamento	46
5.3	Solução não homogénea	47
5.3.1	Pré-processamento	49
5.3.2	Processamento	52
5.3.3	Pós-processamento	52
6	Análise numérica do problema homogéneo	55
6.1	Introdução	55
6.2	Testes de convergência para a solução analítica	55
6.2.1	Solução analítica	55
6.2.2	Modelo de teste	57
6.2.3	Erro relativo	57
6.2.4	Análise de resultados	58
6.3	Sensibilidade à distorção de malha	61
7	Análise numérica do problema não-homogéneo	65
7.1	Introdução	65
7.2	Testes de convergência	65
7.2.1	Solução analítica	65
7.2.2	Modelo de teste	67
7.2.3	Erro relativo	68
7.2.4	Análise de convergência dos resultados	69
7.3	Sensibilidade à distorção da malha	70
7.4	Análise de um caso de estudo mais complexo	72
7.4.1	Descrição do modelo	74
7.4.2	Resultados	74

8	Conclusões	79
	Referências bibliográficas	81
A	Resíduos ponderados e colocação	85
B	Tabelas	87
B.1	Problema homogêneo	87
B.2	Problema não-homogêneo	89
C	Informação adicional da implementação do programa	91
C.1	Sistemas de referência	91
C.2	Estruturas de dados	92
C.3	Funções do programa	93

Índice de Figuras

2.1	Transferência de calor por condução	12
2.2	Transferência de calor por convecção	13
2.3	Transferência de calor por radiação	13
2.4	Condução térmica numa área infinitesimal	15
2.5	Domínio (Ω), fronteiras de Dirichlet (Γ_u) e de Neumann (Γ_σ)	16
3.1	Variação linear da velocidade da temperatura com o tempo	20
3.2	Variação do multiplicador de $T_t(0)$ com o passo de tempo normalizado $\Delta\tau$	24
3.3	Ampliação da figura 3.2.	24
4.1	Malha de elementos finitos e fronteiras de Neumann, Dirichlet e interiores.	28
5.1	Fluxograma de implementação do problema homogêneo.	42
5.2	Malha com o número de cada elemento e fronteira.	44
5.3	Mapeamento do sistema: a) Disposição dos blocos na matrix dos coeficientes (LHS); b) Vector livre (RHS).	45
5.4	Fluxograma de implementação do problema não homogêneo.	48
5.5	Interface (GUI) para a definição do problema.	50
5.6	Mapeamento do sistema.	52
6.1	Representação gráfica da solução analítica 6.3, com diferentes frequências generalizadas ω	56
6.2	Refinamento h - malhas utilizadas no modelo de teste	57
6.3	Campos de temperaturas aproximados para os refinamentos: 1 elemento, $n_D = 4$, e $n_\Gamma = 1$	58
6.4	Campos de temperaturas aproximados para os refinamentos: 16 elemento, $n_D = 15$, e $n_\Gamma = 4$; com ω igual a i e $10i$ respectivamente.	58
6.5	Variação do erro relativo em função da dimensão do sistema.	59
6.6	Modelo de teste de distorção	61
6.7	Resultados do erro (ε_d) para diferentes coeficientes de distorção, com diferentes frequências ω	62
7.1	Variação da temperatura com o tempo	66
7.2	Campo de temperaturas exacto	67
7.3	Campos de temperatura (T) e fluxos de calor em x e y (q_x e q_y) para o modelo de teste mais refinado	68

7.4	Variação do logaritmo do erro (ε_r) em função do logaritmo do esforço computacional (EC) para diferentes passos de tempo.	69
7.5	Solução analítica (7.1) para a análise do erro de distorção	71
7.6	Erro de distorção para diferentes passos de tempo, graus de aproximação ($n_c = 6, n_p = 3, n_\Gamma = 3$) e malha de 4 elementos triangulares	72
7.7	Erro de distorção para diferentes ordens das bases de aproximação, $\Delta t = 0,5$ s e malha de 4 elementos triangulares	72
7.8	Definição do problema e malha de elementos finitos	73
7.9	Valores de temperaturas ao longo do tempo, gráfico adaptado de [1].	73
7.10	Campo de temperaturas no banzo inferior após 5 segundos	74
7.11	Soluções do campo de temperaturas de 3 em 3 minutos	75
7.12	Campos de fluxos de calor q_x e q_y obtidos em $t = 18$ minutos	76
7.13	Variação da temperatura ao longo do tempo nos pontos A,B, C e D.	76
C.1	Sistemas de referência. Fonte: [4].	91

Índice de Tabelas

1.1	Características principais das formulações convencional e híbrida-Trefftz	4
5.1	Estruturas de dados de Edges e Loops e BConds [2]	43
5.2	Estruturas de dados de Loops adicionadas	51
6.1	Refinamento p - ordens das bases de aproximação utilizadas	57
6.2	Resultados da taxa de convergência para os refinamentos p e h.	60
7.1	Refinamentos utilizados para a análise do problema não homogêneo	67
7.2	Frequência generalizada (ω) para cada passo de tempo	68
7.3	Resultados da taxa de convergência para os refinamentos p, h e Δt .	70
B.1	Resultados do erro relativo para vários testes ao modelo com malha rectangular.	87
B.2	Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -1.	87
B.3	Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -2.	88
B.4	Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -3.	88
B.5	Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -4.	88
B.6	Resultados do erro relativo para vários testes ao modelo com malha rectangular.	89
B.7	Resultados do esforço computacional (em segundos) para vários testes ao modelo com malha rectangular.	89
C.1	Estruturas de dados de Bconds [2]	92
C.2	Estruturas de dados de Edges e Loops [2]	93

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas

GDL Graus De Liberdade

GUI *Graphical User Interface* - Interface gráfica

MDF Método das Diferenças finitas

MEF Método dos Elementos Finitos

NaN *Not a Number*

NPG Número de Pontos de Gauss

LHS *Left Hand Side* - Matriz dos coeficientes do sistema governativo

RHS *Right Hand Side* - Vector livre do sistema governativo

Siglas

FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia

UNL Universidade Nova de Lisboa

UL Universidade Lisboa

IST Instituto Superior Técnico

Símbolos Gerais

A Área do domínio

a Número de indeterminação estática

b Número de indeterminação cinemática

Δt Passo de tempo

Γ Fronteira

Γ_Ω	Fronteira exterior ao domínio
Γ_u	Fronteira de Dirichlet
Γ_σ	Fronteira de Neumann
Γ_i	Fronteira interior
Γ_e	Fronteira essencial (interior + Dirichlet)
N_D	Número total de funções na base do domínio
N_Γ	Número total de polinómios na base da fronteira essencial
n_D	Ordem das funções na base do domínio
n_Γ	Grau máximo das funções na base da fronteira essencial
Ω	Domínio
ω	Frequência generalizada
Q	Quantidade de calor
q	Fluxo de calor
q_Γ	Fluxo de calor imposto na fronteira de Neumann
q_i	Fluxo de calor na direcção $i = (x,y,z)$
U	Energia térmica
T	Temperatura
T_Γ	Temperatura imposta fronteira de Dirichlet
T_s	Temperatura média de um fluxo
t	Tempo
\cup	União de conjuntos
\cap	Intersecção de conjuntos
\emptyset	Conjunto vazio
Z_n	Polinómio de Chebyshev de grau n

Matrizes e Vectores

B Matriz de fronteira

B_c Matriz de fronteira para a solução complementar

B_p Matriz de fronteira para a solução particular

D Matriz de condutividade

D_c Matriz de condutividade para a solução complementar

D_p Matriz de condutividade para a solução particular

n Normal unitária à fronteira

q_Γ Vector dos fluxos generalizados

T_Γ Vector das temperaturas generalizadas

U Base de aproximação do campo de temperaturas no domínio

X Vector dos coeficientes de recuperação das temperaturas

Y Vector do coeficiente de recuperação dos fluxos normais de calor

Z Base polinomial de aproximação dos fluxos de calor nas fronteiras essenciais

Características dos Materiais

α Difusidade térmica

c Calor específico

ε Emissividade térmica

h_s Coeficiente de transmissão de calor

k condutibilidade térmica

ρ Massa específica

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e enquadramento do tema

Prever o comportamento dos materiais quando expostos a elevadas temperaturas é fulcral para compreender situações como os incêndios em edifícios e outras infraestruturas, circuitos eléctricos, ou então a reentrada de uma nave espacial na atmosfera, entre outros. Nem todos os materiais que compõem esse sistema foram dimensionados para resistir a altas temperaturas, e mesmo se o forem, dever-se-iam conhecer as alterações de temperatura que sofrem para se estudar o efeito das mesmas sobre a integridade estrutural.

A difusão do calor nos elementos estruturais rege-se por equações diferenciais que expressam a conservação da energia térmica e a relação entre as temperaturas e os fluxos de calor. No entanto, essas equações apenas se podem resolver analiticamente para condições de fronteira triviais, que não têm, geralmente, aplicabilidade prática. Para contornar essas dificuldades, opta-se por utilizar métodos numéricos aproximados para a resolução das equações diferenciais governativas, que, no entanto, envolvem um considerável esforço computacional. Este esforço computacional pode ser gerido recorrendo ao computador, que torna possível resolver problemas matemáticos de forma mais rápida e massiva.

O objectivo deste trabalho é contribuir para o desenvolvimento de uma ferramenta computacional eficiente no ambiente *MATLAB* para modelar elementos estruturais sujeitos a altos gradientes de temperatura e em regime dinâmico transitório, esta ferramenta vai ser incluída como um módulo independente na plataforma *FreeHyTE*. Ao contrário de outras ferramentas computacionais disponíveis para modelar este tipo de problemas, a presente utiliza elementos finitos híbridos-Trefftz, devido à informação física embutida nas suas bases de aproximação. Além disso, os elementos finitos híbridos-Trefftz permitem refinamentos localizados das bases de aproximação, com altas taxas de convergência.

Numa primeira fase deste projecto foram abordados os problemas de difusão térmica em regime permanente, [3], [4] e [2]. Este trabalho corresponde ao início de uma segunda fase de estudo que incide sobre os problemas cujos campos de

temperatura e fluxos de calor variam no tempo.

A ferramenta computacional que resultou destes trabalhos é o *FreeHyTE* e é dotada de interfaces gráficas intuitivas e manuais de instalação para facilitar a sua utilização por parte de utilizadores inexperientes. Cada módulo é disponibilizado gratuitamente à comunidade científica sob licença GNU-GPL.

1.2 Descrição dos elementos finitos híbridos-Trefftz

Os elementos híbridos-Trefftz têm como objectivo combinar características favoráveis dos métodos de elementos finitos e de fronteira. Como é típico do método dos elementos finitos, o domínio é dividido em subdomínios (os elementos finitos), para facilitar a aproximação das soluções complexas utilizando funções de aproximação relativamente simples e regulares. Ademais, os sistemas governativos resultam, em geral, Hermitianos e esparsos. Por outro lado, estes elementos possuem informação física nas bases de aproximação, de maneira semelhante aos métodos dos elementos de fronteira.

Uma forma intuitiva de descrever os elementos finitos híbridos-Trefftz é expôr a comparação com os elementos finitos convencionais (conformes) que são normalmente utilizados no software de Engenharia Civil. Esta relação é apresentada na secção seguinte.

1.2.1 Elementos finitos híbridos-Trefftz e elementos convencionais

Para problemas de condução de calor, são resolvidas duas equações governativas no domínio de cada elemento, nomeadamente o balanço de energia e a lei de Fourier. Também são impostas duas condições nas fronteiras exteriores, nomeadamente a compatibilidade das temperaturas e o balanço dos fluxos de calor. O procedimento da imposição destas equações influencia muito o comportamento dos elementos finitos, podendo haver discrepâncias consideráveis entre as qualidades dos campos recuperados pelo modelo.

Os elementos finitos convencionais satisfazem a lei de Fourier no domínio do elemento e a compatibilidade de temperatura nas fronteiras interiores e exteriores com temperaturas impostas. Por outro lado, o equilíbrio dos fluxos do calor é imposto apenas nos nós da malha.

Quanto à definição das funções de aproximação no domínio do elemento finito convencional, as mesmas são ligadas aos nós porque os seus pesos (graus de liberdade) são as temperaturas nodais. Estas funções de aproximação são polinomiais e as suas expressões são determinadas pelos nós do elemento, de maneira a satisfazerem as condições de compatibilidade das temperaturas. Por outro lado, o balanço dos fluxos de calor não é satisfeito nem no domínio do elemento, nem nas suas fronteiras, pelo que a qualidade da aproximação do campo das temperaturas é tipicamente melhor do que a dos fluxos de calor.

Quanto à definição das funções de aproximação nos elementos finitos híbridos-Trefftz, as temperaturas nodais não são os graus de liberdade do problema e as expressões das funções não são dependentes dos nós do elemento. Assim, as bases de aproximação são hierárquicas, ou seja, a adição de uma nova função de aproximação não requer a mudança das funções anteriores. A característica principal dos elementos finitos híbridos-Trefftz é que as bases de aproximação no domínio do elemento, na sua forma homogênea, satisfazem fortemente (i.e. exactamente) todas equações governativas. Por isso, as funções de aproximação contêm informação física relevante sobre o problema que se está a resolver, o que confere a estes elementos uma notável robustez quando confrontados com situações que envolvem altos gradientes dos campos modelados, como acontece em muitos problemas transitórios de difusão de calor.

Nos elementos finitos híbridos-Trefftz, impõe-se de forma fraca todas as condições de fronteira exteriores, tanto as de temperatura, como as de fluxo de calor. Nas fronteiras interiores é imposta a continuidade de temperaturas mas não o equilíbrio dos fluxos de calor, pelo que a aproximação do campo de fluxos de calor pode ser menos precisa que a do campo de temperaturas, mas esta diferença é menor comparativamente aos elementos finitos convencionais.

Além do mais, as distinções principais entre os sistemas resolutivos dos elementos convencionais e híbridos-Trefftz prendem-se com a assemblagem dos mesmos. Enquanto nos elementos convencionais tem-se uma assemblagem baseada na imposição nodal do balanço energético, havendo somas das matrizes de condutividade de elementos vizinhos na diagonal principal do sistema, nos elementos híbridos-Trefftz a assemblagem do sistema é feita sem adição de matrizes de condutividade. Assim, os elementos finitos híbridos-Trefftz permitem o refinamento localizado das bases de aproximação, mas têm um sistema resolutivo maior do que o sistema dos elementos convencionais para o mesmo número de elementos. Em contrapartida, é possível utilizar elementos muito maiores do que os elementos convencionais, o que reduz, na prática, a dimensão do sistema.

O sistema dos elementos convencionais é sempre cinematicamente indeterminado, mas para os elementos híbridos-Trefftz já é preciso ter uma escolha adequada das ordens das bases de aproximação para garantir que haja solução única.

Em ambos os métodos o sistema resolutivo é esparso e simétrico. Para melhorar a solução obtida, é possível aumentar o refinamento h , do número de elementos, e/ou aumentar o refinamento p , das ordens das bases de aproximação. Estes refinamentos podem ser feitos tanto nos elementos finitos convencionais como nos híbridos-Trefftz.

Para os elementos finitos convencionais, o refinamento típico é o refinamento da malha (h). O refinamento p também é possível, em alguns softwares comerciais, de forma global, sem casos localizados, e se a conformidade da malha for mantida. O refinamento p requer a inserção de novos nós, o que implica recalculer todas as bases de aproximação.

Pelo contrário, nos elementos finitos híbridos Trefftz o refinamento principal é o aumento das ordens das bases de aproximação (p). Devido à informação física contida nestas bases, estes elementos convergem rapidamente perante este refinamento. Além disso, nos elementos finitos híbridos Trefftz cada elemento pode ter bases de aproximação independentes de todos os outros. Para os elementos finitos híbridos Trefftz, a convergência ao refinamento h pode ser inferior à dos elementos convencionais, mas não é necessário garantir a conformidade da malha, ou seja, os valores de temperatura nos nós adjacentes entre elementos não precisam de corresponder, conforme acontece nos elementos convencionais.

Apresenta-se a tabela 1.1, de modo a resumir as características principais dos elementos finitos convencionais e híbridos-Trefftz.

Tabela 1.1: Características principais das formulações convencional e híbrida-Trefftz

Formulações	convencional	híbrida-Trefftz
Aproximações no domínio		
Constrangimentos na aproximação do domínio	Satisfaz a lei de Fourier e a compatibilidade de temperaturas	Satisfaz todas as equações no domínio
Funções de aproximação	Funções polinomiais	Soluções da equação diferencial governativa
Aproximações na fronteira		
Funções de aproximação	Não há	Fluxos normais de calor
Constrangimentos	Não se aplica	Não há
Integração Sistema resolutivo	Numérica, no domínio Hermitiano e esparso	Numérica, nas fronteiras Hermitiano e esparso

1.2.2 Vantagens e desvantagens dos EFHT

As vantagens dos elementos finitos híbridos-Trefftz [2, 3, 5, 4, 6, 7], em comparação com os elementos finitos convencionais, são apresentadas de seguida:

- a qualidade dos resultados é mais equilibrada para os campos de temperatura e fluxos de calor;
- as funções contêm informação física do problema;
- é possível construir elementos grandes, tipicamente 10-30 vezes maiores que os convencionais;
- a convergência ao refinamento p é muito elevada;
- há flexibilidade na escolha das bases de aproximação;
- pode-se fazer um refinamento p localizado;
- os resultados são insensíveis a soluções com elevados gradientes e grandes distorções de malha;
- a conformidade da malha é irrelevante.

Quanto às desvantagens tem-se:

- ligeiramente menor convergência para o refinamento h ;
- maior dificuldade para utilizadores inexperientes em escolher as ordens de aproximação adequadas;
- o utilizador tem que assegurar a indeterminação cinemática do sistema resolutivo;
- o sistema resolutivo é propício ao mau-condicionamento, especialmente com refinamentos das bases de aproximação muito altos.

1.3 Estado da arte

A evolução dos meios computacionais ofereceu a oportunidade de pôr em prática e evoluir o método de elementos finitos, cujas bases tinham sido colocadas por Ritz (1909). As primeiras aplicações do método de elementos finitos na engenharia surgiram na década de 50 do século XX, por Argyris [8], resolvendo problemas aeronáuticos.

Em 1965, Zienkiewicz e Cheung [9] estenderam o método dos elementos finitos para problemas gerais de engenharia. Um procedimento de geração automática das malhas para problemas de domínio bidimensional e tridimensional foi estudado por Piteri [10], em Portugal.

1.3.1 Elementos finitos híbridos-Trefftz

Em 1926, as bases teóricas dos elementos finitos híbridos-Trefftz foram estabelecidas por Trefftz [11], em alternativa ao método proposto por Ritz em 1909. O método de Trefftz consiste em aproximar a solução de um problema definido por equações diferenciais utilizando bases de aproximação. No entanto, por causa da falta de recursos computacionais, na altura não era possível a aplicação directa do método. Em 1973, surgiram as primeiras aplicações, estudadas por Stein [12], com uma combinação entre elementos finitos convencionais (de Ritz) e elementos híbridos-Trefftz em zonas de maior concentrações de tensões e fendas.

Com o desenvolvimento dos meios computacionais, em 1978, Jirousek [13] apresenta quatro formulações híbridas-Trefftz para a resolução de problemas de mecânica estrutural. Na década de 80, surgiram várias derivações do método, elaboradas principalmente por I. Herrera [14], sendo estabelecidas os fundamentos matemáticos para construir bases de aproximação completas.

Ao contrário da abordagem de Jirousek, Freitas [15] propõe que a continuidade de todos os campos nas fronteiras seja feita de forma fraca. Esta opção aumenta consideravelmente a flexibilidade da definição das bases de aproximação e levanta a limitação da conformidade da malha. Por outro lado, o significado físico dos pesos das funções de aproximação perde-se. As formulações híbridas-Trefftz aplicadas a problemas tridimensionais foram realizadas por Freitas e Bussamra [16]. Os mesmos autores aplicaram estes elementos a problemas elastoplásticos,

onde os termos do sistema resolutivo do método dos elementos finitos não podem ser definidos apenas por integrais na fronteira. Mesmo assim, a informação física nas bases de aproximação permitiu alcançar resultados convergentes e estáveis.

No âmbito dos problemas estruturais harmônicos, Freitas e Cismaşiu [17] desenvolveram elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento para a modelação de meios semi-infinitos.

Uma nova técnica de integração no tempo foi utilizada na formulação híbrida-Trefftz para a análise de estados planos de deformação para solos saturados, desenvolvida por Freitas e Moldovan [18, 19]. A técnica utilizada permite utilizar a mesma formulação de elementos finitos para problemas harmônicos, periódicos e transitórios, porque a discretização no tempo gera equações espectrais independentemente do método utilizado. Foram estudadas em detalhe, por Moldovan e Freitas, a convergência e a robustez destes elementos. Foi concluído que os elementos híbridos-Trefftz são robustos para problemas que envolvem meios quase incompressíveis, distorção da malha e altos gradientes da solução.

A formulação de elementos híbridos-Trefftz para problemas poroelásticos envolvendo solos saturados e não saturados foi desenvolvida por Moldovan [20, 21].

Os elementos híbridos-Trefftz têm muito desenvolvimento na modelação de lajes finas ou espessas para o estudo da flexão. Nos casos de problemas que envolvem pontos de singularidade provocados por forças concentradas, descontinuidades geométricas ou fendas, foram acrescentadas funções específicas nas bases de aproximação das formulações de forma a facilitar a recuperação desses pontos. O caso de tensões em aberturas circulares foi estudado por Jirousek e Guex [22]. Além do mais, Cismaşiu [23] e Piltner [24] desenvolveram trabalhos sobre o caso de cargas concentradas e fendas em cunha em paredes.

A aplicação dos elementos híbrido-Trefftz a problemas de potencial iniciou-se com Zienlinski e Zienkiewicz [25], para resolver a equação de Laplace. Os trabalhos aplicados em problemas de condução térmica foram realizados por Jirousek [26], Shaw, Huang e Zhao [27], Wang e Qin [28] e Leitão [29].

1.3.2 Método da reciprocidade dual

Uma das vantagens principais dos elementos finitos híbridos-Trefftz é a redução da formulação à fronteira dos mesmos. Isto acontece se as bases de aproximação dos elementos foram construídas de maneira a satisfazer exactamente todas equações governativas do problema. A redução da formulação à fronteira melhora a convergência sob o refinamento p , a robustez à distorção de malha e altos gradientes da solução [20, 30]. Contudo, soluções particulares exactas podem não existir quando o problema não é homogéneo, especialmente se o termo fonte incluir o efeito das condições iniciais, o que acontece frequentemente em problemas transitórios [31].

Nestas condições, a solução particular pode ainda ser calculada como o produto

interno do termo fonte com a solução fundamental do operador diferencial presente na equação que governa o problema. Esta abordagem deveria obter uma solução exacta, mas requer a integração da solução fundamental (singular) no domínio do elemento, o que não é fácil de obter. Em alternativa, pode-se utilizar o método da reciprocidade dual, que foi apresentado por Nardini e Brebbia em 1982 [32].

Ao contrário da abordagem da solução fundamental, a metodologia da reciprocidade dual origina formulações definidas apenas nas fronteiras, mas abandona a procura de uma solução particular exacta e aceita uma aproximação da mesma.

O método da reciprocidade dual funciona em duas etapas. Primeiro, o termo não homogéneo (termo fonte) é aproximado numa base adequada utilizando o método da colocação no domínio (ver anexo A). No segundo passo, a aproximação da solução particular é obtida resolvendo analiticamente a equação diferencial com a aproximação do termo fonte como um termo não homogéneo. Este método foi aplicado em diferentes tipos de problemas, incluindo as equações de Poisson e bi-harmónica [33], em 1984, problemas parabólicos [34], em 1988, elípticos [35] e hiperbólicos [36], em 1998. Mais informações e comentários relacionados com este método podem ser encontrados nas referências [37, 38].

No método da reciprocidade dual, para aproximar o termo fonte usam-se tipicamente funções de base radial [36], apesar de já se ter experimentado funções trigonométricas e polinomiais [39]. Para operadores diferenciais mais simples como o de Laplace, as expressões para a solução particular são bastante simples [37]. Para problemas diferenciais parabólicos ou hiperbólicos [40], já se obtém expressões complicadas e, por vezes, singulares.

De maneira a evitar, ao mesmo tempo, a integração no domínio e as expressões muito complicadas na base da solução particular, foram propostas duas estratégias recentemente. Numa delas é sugerido construir a base da solução particular usando funções compatíveis com a condição de Trefftz do problema estático, obtido eliminando todos os termos dependentes do tempo da equação diferencial original [31, 41]. Além disso, as funções de teste das soluções particular e complementar são unidas na mesma base e são impostas as mesmas condições sobre ambas as bases. Contudo, os coeficientes do sistema resolutivo incluem os termos definidos por integrais no domínio. Apesar de os mesmos serem geralmente simples e sem singularidades, a presença de integrais no domínio prejudica uma das vantagens importantes dos elementos finitos híbridos-Trefftz.

Por outro lado, na referência [42] é apresentada uma técnica da reciprocidade dual para soluções de problemas hiperbólicos onde as funções de teste do tipo Trefftz são usadas tanto para o termo fonte como para aproximações da solução particular (excepto um multiplicador constante). Além disso, as funções de teste são simples e sem pontos de singularidade, excepto quando fisicamente justificáveis.

Uma abordagem semelhante aos problemas hiperbólicos foi desenvolvida independentemente por Alves [43], no contexto do Método da Solução Fundamental.

Neste trabalho, a técnica apresentada na referência [42] é estendida a soluções não homogêneas de problemas de difusão de calor. O termo fonte representa a geração interna de calor e pode assumir qualquer distribuição no tempo e no espaço, podendo ou não ter um valor analítico. A formulação apresentada neste trabalho é seguida de uma investigação das propriedades de convergência e robustez da técnica, e por uma descrição da sua implementação no ambiente *MATLAB*.

1.3.3 Plataforma computacional *FreeHyTE*

A plataforma *FreeHyTE* é uma coleção de programas para a resolução de problemas físicos definidos por equações diferenciais elípticas, parabólicas e hiperbólicas, usando os elementos híbridos-Trefftz. O desenvolvimento é feito de forma modular mas com uma estrutura de dados, algoritmos e sequências Input/Output semelhantes. A definição dos problemas a resolver é feita utilizando uma série de interfaces gráficas (GUI), de modo a facilitar a utilização dos módulos por analistas inexperientes. Cada módulo é publicado sob a licença GNU-GPL (open source), de maneira a permitir que uma difusão alargada da plataforma na comunidade científica. Existem manuais para os utilizadores [5] e investigadores [44] da plataforma.

A implementação deste trabalho na plataforma *FreeHyTE* traz vantagens a nível da pré-programação de procedimentos numéricos comuns aos módulos do *FreeHyTE* e da interface gráfica.

Os estudos mais recentes que ajudaram a alcançar a versão da plataforma *FreeHyTE* que foi utilizada no desenvolvimento deste trabalho são apresentados de seguida.

Em 2014, Silva publicou a sua tese relacionada com formulações de elementos finitos para problemas de condução térmica em regime estacionário. Da tese constava uma comparação entre elementos finitos convencionais, híbridos e híbridos-Trefftz [3]. Os elementos híbridos e híbrido-Trefftz foram programados no *MATLAB*.

O primeiro módulo do *FreeHyTE* foi desenvolvido em 2015 por Moldovan e Radu [42], para resolver problemas hiperbólicos não-homogêneos.

Na continuação deste trabalho, e ainda em 2015, Pereira implementou elementos finitos híbridos para problemas estacionários de condução térmica com um algoritmo p-adaptativo para a escolha automática das bases de aproximação [4]. No âmbito deste trabalho foi criada a primeira interface gráfica do *FreeHyTE*.

Em 2016, Geraldês implementou algoritmos p-adaptativos dos elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas de condução [2]. Esta evolução permite agora que se possa resolver problemas de condução de calor em regime estacionário, sem que o utilizador necessite de calibrar os graus de aproximação nos elementos e nas fronteiras essenciais, para obter bons resultados.

Outros trabalhos de desenvolvimento de elementos finitos híbridos-Trefftz na plataforma *FreeHyTE* foram relativos a problemas estruturais. Em 2016, Silva

[6] utilizou os elementos finitos híbridos-Trefftz para a resolução de problemas elastoestáticos planos, física e geometricamente lineares, usando um modelo de deslocamentos. Em 2017, Sequeira [7] desenvolveu um modelo de tensão para resolver problemas elastoestáticos envolvendo estados planos de tensão ou deformação.

A plataforma foi apresentada por Cismaşiu e Moldovan num congresso internacional dedicado aos métodos de Trefftz em 2017 [45].

No caso do presente estudo as formulações de elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura são estendidas a problemas transitórios, pois só deste modo será possível obter um modelo que recrie a dinâmica do comportamento de um material perante um incêndio.

O módulo resultante é gratuito e livremente distribuído à comunidade científica através da página web [46] da plataforma *FreeHyTE*.

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em 9 capítulos e 3 anexos.

O 2º capítulo descreve os mecanismos de transferência de calor, as suas equações governativas, as condições de fronteiras e hipóteses simplificativas adoptadas.

O 3º capítulo introduz o conceito de discretização no tempo, obtendo a formulação na equação de Navier no passo de tempo.

O 4º capítulo apresenta a formulação dos elementos finitos Trefftz para problemas homogêneos. Neste capítulo definem-se as funções para as bases de aproximação no domínio e nas fronteiras, e são apresentados o sistema governativo deste problema e a definição da indeterminação estática e cinemática.

O 5º capítulo apresenta a formulação dos elementos finitos Trefftz para problemas não-homogêneos. Neste capítulo é apresentado o método da reciprocidade dual para obter a solução particular e a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz necessária para obter a solução complementar.

O 6º capítulo apresenta a implementação computacional das formulações de elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas homogêneos e não homogêneos.

No 7º capítulo tem-se a análise numérica dos resultados obtidos utilizando a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz para problemas homogêneos. Neste capítulo é feita uma análise de convergência e robustez à distorção de malha utilizando um problema com solução analítica conhecida.

O 8º capítulo trata da análise numérica dos resultados obtidos utilizando a

formulação para problemas não-homogêneos, onde se apresenta uma análise de convergência e estabilidade dos mesmos. É demonstrada a aplicação da ferramenta computacional desenvolvida para a resolução de um problema mais complexo, envolvendo um perfil I sujeito a um incêndio, utilizando um conjunto de dados de temperaturas de um ensaio de fogo.

No 9º e último capítulo deste trabalho, conclui-se e comenta-se sobre os resultados obtidos e são também apresentadas propostas para o desenvolvimento futuro.

Apresentam-se métodos de aproximação utilizados neste trabalho no anexo A, as tabelas de resultados no anexo B e os referenciais utilizados e funções do programa no anexo C.

Capítulo 2

Definição do problema

Neste capítulo são apresentados três diferentes mecanismos de transferência de calor revelantes para o estudo dos elementos estruturais, nomeadamente a condução, convecção e radiação. Para a ocorrência de qualquer um desses mecanismos, é necessário que haja uma diferença de temperatura entre dois corpos, ou no interior de um determinado corpo. A transferência de calor do meio ambiente para o elemento estrutural pode-se fazer através de qualquer mecanismo. A transferência de calor no interior do elemento estrutural faz-se preponderantemente através do mecanismo da condução. Por isso, dá-se mais atenção neste trabalho à transferência de calor através da condução.

O fenómeno de condução foi modelado no regime estacionário na referência [2], sendo a formulação aqui estendida a problemas em regime transitório. No regime estacionário, os campos de temperaturas e fluxos de calor mantêm-se constantes no tempo. A transferência de calor em regime transitório é dependente do tempo.

2.1 Condução

A transferência de calor por condução consiste na transferência de energia térmica através da vibração e agitação molecular. Além de ocorrer em sólidos, a condução também ocorre em fluidos e gases. A condução só se dá por contacto direto entre dois meios ou no interior de um meio.

O fenómeno de condução é representado esquematicamente na figura 2.1. Considera-se, para simplificar, que a temperatura T [K] apenas varia na direcção x . Assim, a diferença de temperatura entre as fronteiras do meio $\Delta T = (T_2 - T_1)$ é provocada pela quantidade de calor Q [J/s ou W] que atravessa a área A [m²] por unidade de tempo.

A taxa de transferência de calor é definida na equação,

$$\Delta Q = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} A \quad (2.1)$$

onde k [Wm⁻¹K⁻¹] representa a condutividade térmica e Δx [m] é a espessura do

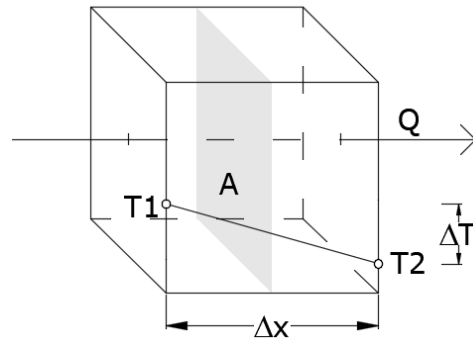


Figura 2.1: Transferência de calor por condução

elemento.

A forma diferencial da equação (2.1) é dada por,

$$Q = -k \frac{\partial T}{\partial x} A \quad (2.2)$$

Define-se ainda o fluxo de calor q [W/m^2] como sendo a quantidade de calor que atravessa uma área unitária por unidade de tempo,

$$q = \frac{Q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.3)$$

O sinal negativo na definição (2.3) deve-se ao facto do fluxo de calor ocorrer da temperatura mais elevada para a temperatura mais baixa.

2.2 Convecção

A transmissão de calor por convecção ocorre através de um fluido, sendo este líquido ou gasoso.

Quando um fluido é aquecido existe uma diminuição da densidade do mesmo associada ao respectivo aumento de temperatura. Assim, os fluidos menos densos têm tendência a ficar por cima dos fluidos mais densos, o que provoca o seu movimento no interior do meio.

Na figura 2.2, é possível observar esta transmissão de calor, gerada pela subida da água aquecida no fundo do recipiente e a descida da água fria que arrefeceu na parte de cima do mesmo.

A transferência de calor por convecção do meio fluido para o sólido circundante é dada pela equação,

$$q = h_s(T_\Gamma - T_s), \quad (2.4)$$

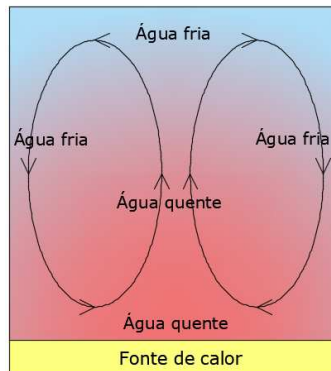


Figura 2.2: Transferência de calor por convecção

sendo o fluxo de calor (q) normal à superfície onde ocorre essa transferência.

Na equação (2.4), h_s [$W K^{-1} m^{-2}$] representa o coeficiente de transmissão de calor por convecção, T_Γ é a temperatura da superfície sólida e a T_s é a temperatura média do fluido envolvente.

A convecção causada por uma acção exterior é denominada de convecção forçada. Um exemplo típico é a convecção provocada por ventoinhas e pelo ar condicionado.

2.3 Radiação

A transmissão de calor por radiação não necessita de um meio material para ocorrer. O calor é transportado através de ondas electromagnéticas que podem propagar-se no vácuo.

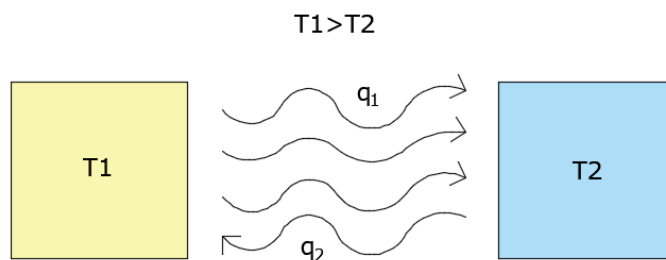


Figura 2.3: Transferência de calor por radiação

Qualquer corpo com temperatura superior a 0 K transmite energia térmica sob a forma de radiação. Existindo dois corpos (figura 2.3), um mais quente que o outro,

ambos absorvem e emitem energia térmica por radiação, mas o mais frio absorve maior quantidade.

A equação que exprime o fluxo de calor emitido por radiação é definida por,

$$q = \varepsilon \sigma T^4 \quad (2.5)$$

A emissividade da superfície ε é dada pelo rácio entre a energia emitida por um corpo cinzento e um corpo negro, podendo variar de 0 a 1. A emissividade de um corpo negro é 1 e corresponde a um irradiador perfeito, que absorve toda a radiação incidente sobre o mesmo. A constante de Stefan-Boltzmann σ corresponde a $5.670 \times 10^{-8} [Wm^{-2}K^{-4}]$ e T é a temperatura absoluta da superfície.

O fluxo de calor trocado entre dois corpos (1 e 2) através da radiação é dada pela expressão,

$$q = \varepsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.6)$$

2.4 Definição do problema a resolver

O problema que se resolve neste trabalho é a transferência de calor por condução.

Para a definição do problema são assumidas hipóteses simplificativas a nível do material do elemento estrutural em estudo e a nível do fenómeno de transferência de calor. O problema é definido pelas equações no domínio e pelas condições aplicadas às suas fronteiras.

2.4.1 Hipóteses simplificativas

De modo a simplificar o problema referente à transferência de calor, sem reduzir drasticamente a sua aplicabilidade prática, são consideradas as seguintes hipóteses simplificativas.

Assumiu-se que o material que compõe o elemento estrutural é: sólido; homogéneo; isotrópico; com comportamento fisicamente linear; de condutibilidade térmica (k), densidade (ρ) e calor específico (c) constantes.

Quanto ao fenómeno de transferência de calor, considera-se que este ocorre: em regime transitório; apenas pelo mecanismo de condução de calor; com o calor gerado internamente a variar com o tempo e espaço; nas dimensões x e y , considerando-se que os fluxos de calor e a temperaturas são constantes na direcção z .

2.4.2 Equações no domínio

As condições a aplicar no domínio resultam das equações da transferência de calor por condução.

A generalização da equação (2.3) define o fluxo de calor no referencial cartesiano ($\mathbf{x} = (x, y)^T$) pela equação (2.7), em que o operador gradiente ∇ é definido na equação,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k\nabla T(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right)^T \quad (2.8)$$

A relação (2.7) é denominada de lei de Fourier.

O fluxo normal é definido na equação,

$$q(\mathbf{x}, t) = -k\mathbf{n}\nabla T(\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

em que \mathbf{n} é o vector normal exterior à superfície do meio.

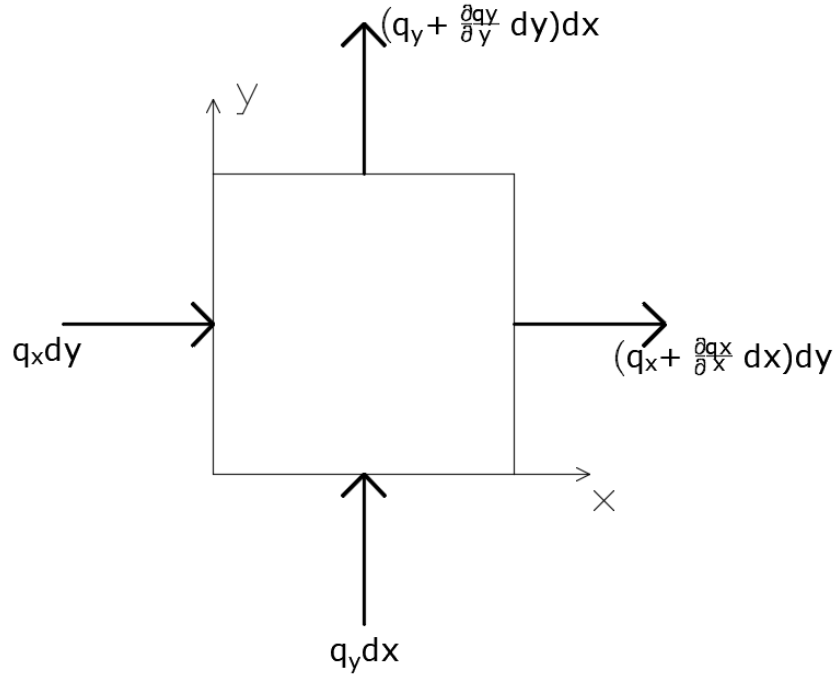


Figura 2.4: Condução térmica numa área infinitesimal

A condição da conservação de energia térmica requer que os fluxos normais de calor e o calor gerado interiormente devem ser equilibrados.

No elemento infinitesimal da figura 2.4, a diferença entre os fluxos de calor que entram e saem é definida matematicamente pela expressão,

$$dq = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx - q_x \right) dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - q_y \right) dx \quad (2.10)$$

Pelo princípio da conservação de energia sabe-se que a energia dum sistema mantém-se, assim a diferença entre os fluxos que entram e saem do meio deve ser igual à soma do calor gerado internamente, $Q \, dV$, e o calor ganho na unidade de tempo. O calor ganho é proporcional à massa volúmica (ρ) e calor específico do material (c). A equação que representa o equilíbrio dos fluxos de calor é dada por,

$$Q - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.7) na equação (2.11) resulta a expressão,

$$Q + \nabla^T k \nabla T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.12)$$

que se denomina aqui de equação de Navier, por analogia com a equação equivalente da Mecânica Estrutural.

Considerando o calor interno nulo a equação (2.12) passa a ter a forma da equação da difusão,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \quad (2.13)$$

em que a difusividade térmica $\alpha \, [m^2 s^{-1}]$ é igual a $\frac{k}{\rho c}$. O operador $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o chamado operador Laplaciano.

A partir da equação (2.13) chega-se a um significado físico de velocidade de propagação do calor num material sólido.

2.4.3 Condições iniciais e de fronteira

Considere-se um elemento estrutural cujo domínio é designado por Ω , e cujas fronteiras do tipo Dirichlet (Γ_u) têm temperaturas impostas, e fronteiras de tipo Neumann (Γ_σ) têm fluxos normais de calor impostos (figura 2.5).

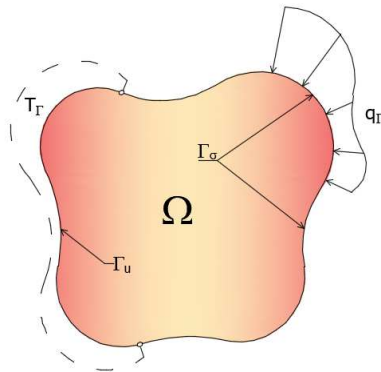


Figura 2.5: Domínio (Ω), fronteiras de Dirichlet (Γ_u) e de Neumann (Γ_σ)

A fronteira Γ_Ω que delimita a área do domínio é definida pela união das fronteiras de Dirichlet (Γ_u) e Neumann (Γ_σ), conforme a equação,

$$\Gamma_\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \quad (2.14)$$

Por outro lado a intersecção destas fronteiras resulta no vazio,

$$\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma \quad (2.15)$$

Neste trabalho, apenas se consideram condições de fronteira de Dirichlet e de Neumann (temperatura e fluxos de calor impostos, respectivamente), e não condições de fronteira de Robin, típicas dos problemas envolvendo fenómenos de convecção. Nas fronteiras de Robin é imposta uma relação entre temperatura e fluxo de calor, tendo em consideração o coeficiente de convecção h_s conforme a equação (2.4).

Na fronteira de Dirichlet é imposta a condição,

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.16)$$

onde $T_\Gamma(\mathbf{x}, t)$ representam as temperaturas impostas.

Por outro lado, na fronteira de Neumann impõe-se o fluxo normal de calor, $q_\Gamma(\mathbf{x}, t)$:

$$-k\mathbf{n}\nabla T(\mathbf{x}, t) = q_\Gamma(\mathbf{x}, t) \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.17)$$

Conhece-se ainda a temperatura no instante inicial em todo o domínio Ω do problema,

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.18)$$

O problema definido pelas equações diferenciais (2.9) e (2.12), sujeito às condições de fronteira (2.16) e (2.17) e iniciais (2.18) será resolvido nos próximos três capítulos através do método dos elementos finitos híbridos-Trefftz.

Capítulo 3

Discretização no tempo

3.1 Introdução

O problema da condução de calor em regime transitório descrito no capítulo 2 é resolvido através da sua discretização, sucessivamente, no tempo e no espaço.

O objectivo da discretização no tempo é reduzir o problema em tempo e espaço a uma série de problemas no espaço apenas. Para tal, o tempo total da análise é dividido numa série de passos de tempo. No final de cada passo colocam-se as equações governativas, cuja resolução provêm os resultados para as condições iniciais do passo seguinte.

Para a discretização no tempo podem ser utilizados diferentes métodos, tais como a transformada de Laplace [47], o método das diferenças finitas [48] e o método dos resíduos ponderados [49]. Neste trabalho é usado um algoritmo baseado no método das diferenças finitas, nomeadamente no método do ponto mediano generalizado (*generalized mid-point time stepping*).

3.2 Formulação da equação de Navier no passo de tempo

As equações para resolver no domínio são nomeadamente o equilíbrio dos fluxos de calor (2.11) e a equação de Fourier (2.7). Conforme ilustrado na secção 2.4.2, essas equações podem ser escritas na forma compacta da equação de Navier (2.12). Os campos das temperaturas e dos fluxos de calor devem ainda respeitar as condições de Dirichlet (2.17) e de Neumann (2.18).

Considere-se que a duração total da análise é discretizada em passos de tempo de duração Δt . As condições iniciais do passo de tempo corrente descrevem os campos das temperatura, $T_o(\mathbf{x})$, e a sua derivada no tempo, $\dot{T}_o(\mathbf{x})$, e consideram-se conhecidas do passo de tempo anterior. As condições iniciais no primeiro passo são especificadas pelo analista. De notar que a definição do campo $\dot{T}_o(\mathbf{x})$ no primeiro passo é opcional para o utilizador, o mesmo podendo ser calculado ainda pela colocação da equação de Navier (2.12) no $t = 0$.

No passo de tempo corrente, a variação temporal do campo das temperaturas é aproximada utilizando as séries de Taylor. Truncando a série a seguir ao termo quadrático no tempo, temos que a temperatura no final do passo de tempo é dada por,

$$T_{\Delta t} = T_0 + \Delta t \dot{T}_0 + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{T}_0 \quad (3.1)$$

onde a segunda derivada do campo de temperaturas, $\ddot{T}_0(\mathbf{x})$, não é geralmente conhecida. Um procedimento intuitivo para obter a segunda derivada em função da primeira derivada da temperatura inicial \dot{T}_0 assume que a sua variação ao longo do tempo é linear (figura 3.1),

$$\ddot{T}_0 = \frac{\dot{T}_{\Delta t} - \dot{T}_0}{\Delta t} \quad (3.2)$$

mas este procedimento não é único, e uma generalização sua será apresentada mais abaixo.

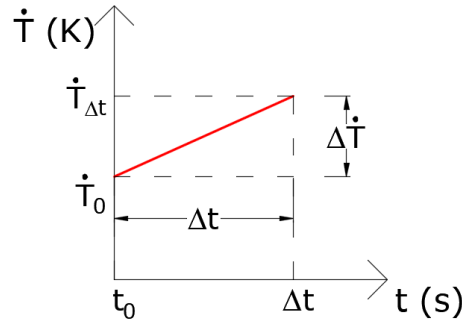


Figura 3.1: Variação linear da velocidade da temperatura com o tempo

É feita a substituição da equação (3.2) na definição (3.1), resultando a seguinte aproximação para a derivada temporal das temperaturas no final do passo corrente,

$$\dot{T}_{\Delta t} = \frac{2}{\Delta t} (T_{\Delta t} - T_0) - \dot{T}_0 \quad (3.3)$$

Conforme referido acima, a aproximação (3.3) não é a única aceitável, sendo generalizada na forma,

$$\dot{T}_{\Delta t} = \frac{1}{\underline{\theta} \Delta t} (T_{\Delta t} - T_0) - \frac{1 - \underline{\theta}}{\underline{\theta}} \dot{T}_0 \quad (3.4)$$

onde $\underline{\theta}$ é um parâmetro cuja escolha controla as propriedades algorítmicas do método de integração, conforme mostrado na secção 3.3. Note-se, em particular, que a escolha de $\underline{\theta} = 1/2$ reduz a generalização (3.4) à equação (3.3).

Ao substituir a aproximação (3.4) na equação de Navier (2.12) e separar as parcelas desconhecidas das parcelas conhecidas, resulta a equação,

$$\nabla^T k \nabla T_{\Delta t} - \frac{\rho c}{\underline{\theta} \Delta t} T_{\Delta t} = -Q_{\Delta t} - \frac{\rho c}{\underline{\theta} \Delta t} T_0 - \frac{1 - \underline{\theta}}{\underline{\theta}} \rho c \dot{T}_0 \quad (3.5)$$

Recorrendo às seguintes notações,

$$\alpha = \frac{k}{c\rho} \quad (3.6)$$

$$\omega^2 = -\frac{1}{\alpha \underline{\theta} \Delta t} \quad (3.7)$$

$$f_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{k}(Q_{\Delta t}(\mathbf{x})) - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\underline{\theta} \Delta t} T_0(\mathbf{x}) + \frac{1 - \underline{\theta}}{\underline{\theta}} \dot{T}_0(\mathbf{x}) \right) \quad (3.8)$$

a equação (3.5) passa a ter a forma final que corresponde à equação de Navier no passo de tempo corrente,

$$\nabla^2 T_{\Delta t}(\mathbf{x}) + \omega^2 T_{\Delta t}(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) \quad (3.9)$$

Nas equações, α é a difusividade térmica, ∇^2 é o operador Laplaciano, $\nabla^2 = \nabla^T \cdot \nabla$, e ω é uma frequência generalizada, puramente imaginária.

A equação governativa (3.9) é complementada pelas condições de fronteira,

$$T_{\Delta t}(\mathbf{x}) = T_{\Gamma}(\mathbf{x}, \Delta t) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{n} \mathbf{q}_{\Delta t}(\mathbf{x}) = q_{\Gamma}(\mathbf{x}, \Delta t) \quad (3.11)$$

As condições (3.10) e (3.11) são obtidas pela colocação directa das condições de Dirichlet (2.17) e Neumann (2.18) no final do passo de tempo, $t = \Delta t$.

As equações (3.9) a (3.11) definem o problema a resolver no passo de tempo corrente. A equação diferencial governativa (3.9) é uma equação de tipo Helmholtz não homogénea, cujo termo fonte engloba as contribuições da geração interna de calor e das condições iniciais do passo de tempo. A formulação dos elementos finitos híbridos-Trefftz para a resolução do problema será abordada em duas fases. Na primeira, descrita no capítulo 4, é resolvido o problema homogéneo, isto é, com $f_0 = 0$. Na segunda fase, descrita no capítulo 5, a formulação é generalizada para $f_0 \neq 0$.

3.3 Estabilidade do esquema de discretização no tempo

Nesta secção é discutido o efeito da escolha do parâmetro $\underline{\theta}$ sobre a estabilidade numérica do algoritmo de discretização no tempo.

Para analisar as características numéricas do algoritmo, recorre-se ao caso de estudo mais simples de um domínio unidimensional e sem geração interna de calor. A equação governativa, para esta situação, é a equação,

$$\dot{T}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.12)$$

A equação (3.12) resolve-se separando as variáveis no tempo e no espaço, conforme a definição,

$$T(x, t) = T_x(x) \cdot T_t(t) \quad (3.13)$$

Para a variação espacial da temperatura $T_x(x)$, assume-se uma variação definida por,

$$T_x(x) = e^{ix} \quad (3.14)$$

onde i é a unidade imaginária. Note que a forma mais geral é $T_x(x) = e^{Aix}$, com A constante, mas a abordagem mais geral não faria nenhuma diferença neste estudo, pelo que se adoptou $A = 1$.

Substituindo a definição (3.14) na equação (3.12) obtém-se,

$$\dot{T}_t(x, t) - \alpha T_t(t) = 0 \quad (3.15)$$

A equação (3.15) é resolvida analítica e numericamente e os resultados são comparados para diferentes escolhas do parâmetro $\underline{\theta}$.

Assume-se uma variação do tipo $T_t(t) = e^{Bt}$, assim a expressão (3.15) resolve o valor da constante B ,

$$B \cdot e^{Bt} + \alpha \cdot e^{Bt} = 0 \Rightarrow B = -\alpha \quad (3.16)$$

Assim sendo, a solução analítica da equação (3.15) é,

$$T(t) = e^{-\alpha t} \quad (3.17)$$

Os valores da temperatura no início e no fim do passo de tempo Δt satisfazem, assim, a relação recursiva,

$$T_t(t + \Delta t) = e^{-\alpha(t + \Delta t)} = e^{-\alpha \Delta t} \cdot T_t(t) \quad (3.18)$$

Tendo em conta que o valor de α apenas pode ser positivo, a relação (3.18) significa que, nas condições do problema analisado, o valor absoluto da temperatura só poderá baixar de um passo de tempo para outro,

$$|T_t(t + \Delta t)| < |T_t(t)| \quad (3.19)$$

Para obter a solução numérica da equação (3.15), aplica-se o esquema descrito na secção 3.3. A equação (3.15) é colocada no final do passo de tempo e a derivada temporal da temperatura é expressa através da aproximação,

$$\frac{1}{\underline{\theta} \Delta t} (T_t(\Delta t) - T_t(0)) - \frac{1 - \underline{\theta}}{\underline{\theta}} \dot{T}_t(0) + \alpha T_t(\Delta t) = 0 \quad (3.20)$$

Tendo em conta que no início do passo de tempo a equação (3.15) deve ser satisfeita, temos que $\dot{T}_t(0) = -\alpha T_t(0)$. Assim a equação (3.20) fica,

$$(1 + \alpha \underline{\theta} \Delta t) T_t(\Delta t) - [1 - (1 - \underline{\theta}) \alpha \Delta t] T_t(0) = 0$$

$$T_t(\Delta t) = \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha \underline{\theta} \Delta t} \right) T_t(0) \quad (3.21)$$

As relações (3.18) e (3.21) relacionam directamente as temperaturas no início e no fim do passo de tempo. Conforme a relação (3.19), o multiplicador de $T_t(0)$ tem sempre que garantir a redução do módulo de $T_t(\Delta t)$, e para isso é preciso garantir que o seu módulo é inferior a 1,

$$-1 \leq 1 - \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha \underline{\theta} \Delta t} \leq 1 \quad (3.22)$$

Assumindo as constantes $\alpha, \underline{\theta}$ e Δt positivas, o lado direito da desigualdade (3.22) é sempre satisfeito. No entanto, o seu lado esquerdo nem sempre é garantido. Por esse motivo é preciso satisfazer a equação,

$$\frac{\Delta \tau}{1 + \underline{\theta} \Delta \tau} \leq 2 \Rightarrow \Delta \tau \leq 2(1 + \underline{\theta} \Delta \tau) \quad (3.23)$$

onde se define o passo de tempo normalizado $\Delta \tau = \alpha \Delta t$.

A condição (3.23) garante que a solução não diverge de um passo de tempo para outro. Para esta expressão ser respeitada independentemente do valor de $\Delta \tau$, o valor do parâmetro $\underline{\theta}$ tem que respeitar,

$$\underline{\theta} \geq \frac{1}{2} \quad (3.24)$$

Se a inequação (3.24) for respeitada, o método de integração no tempo chama-se de incondicionalmente estável. Caso contrário, a condição de estabilidade (3.23) ainda pode ser respeitada escolhendo valores suficientemente baixos de Δt (métodos condicionalmente estáveis).

As escolhas mais comuns para o parâmetro $\underline{\theta}$ são $\underline{\theta} = 0$ (método de Euler directo), $\underline{\theta} = 1/2$ (método de Crank-Nicolson), $\underline{\theta} = 2/3$ (método de Galerkin) e $\underline{\theta} = 1$ (método de Euler indirecto). Apenas a primeira escolha não garante a estabilidade incondicional do algoritmo de integração. No entanto, é importante realçar que a estabilidade incondicional não garante que os erros de algoritmo numérico serão insignificantes, mas apenas que os resultados numéricos não irão divergir de um passo de tempo para outro. De facto, a qualidade da aproximação numérica pode ser avaliada directamente para o caso unidimensional em análise, comparando os multiplicadores de $T_t(0)$ presentes nas expressões (3.18) e (3.21), em função do passo de tempo normalizado, $\Delta \tau$.

Esta comparação é feita na figura 3.2, para diferentes valores do coeficiente $\underline{\theta}$.

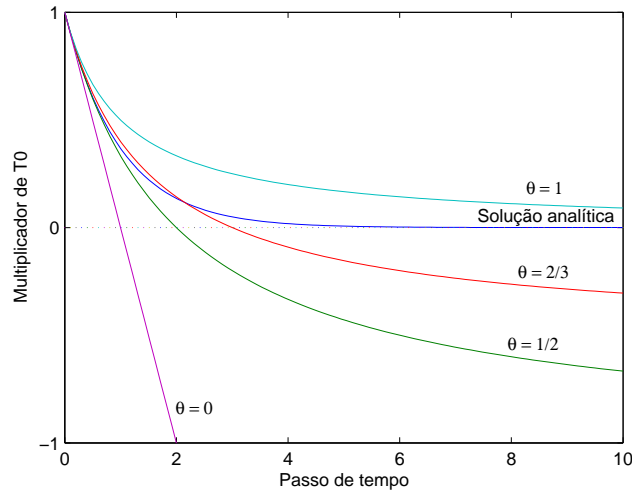


Figura 3.2: Variação do multiplicador de $T_t(0)$ com o passo de tempo normalizado $\Delta\tau$.

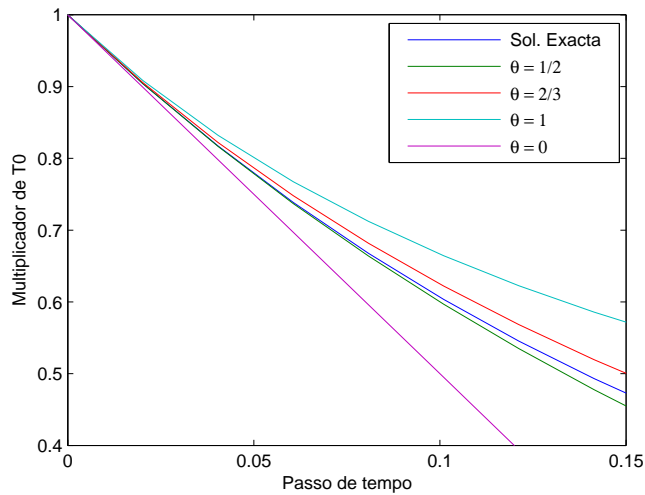


Figura 3.3: Ampliação da figura 3.2.

A análise do gráfico 3.2, que abrange uma gama considerável de passos de tempo normalizados ($\Delta\tau \in]0, 10]$), revela que todas as escolhas do parâmetro $\underline{\theta}$ levam a erros reduzidos para passos de tempo pequenos. As principais diferenças entre as escolhas dos parâmetros $\underline{\theta}$ fazem-se sentir para passos de tempo grandes, nomeadamente nos comportamentos assintóticos dos algoritmos.

Pela análise dos gráficos, é óbvio que apenas uma das três escolhas estáveis do parâmetro $\underline{\theta}$ ($\underline{\theta} = 1$) tem a propriedade de aniquilação assintótica própria da solução exacta. Seria de esperar, então, que os erros obtidos com $\underline{\theta} = 1/2$ e $\underline{\theta} = 2/3$ fossem consideráveis para passos de tempo normalizados muito grandes. Uma situação especial ocorre para $\underline{\theta} = 0$, cujos resultados se tornam instáveis para $\Delta\tau \geq 2$.

Por outro lado, como na prática os valores dos passos de tempo são raramente muito grandes, importa analisar também a evolução dos erros para valores reduzidos de $\Delta\tau$. Para isso, apresenta-se no gráfico 3.3 uma ampliação do gráfico 3.2, para valores de $\Delta\tau \leq 0.15$. Desta vez, das três escolhas incondicionalmente estáveis, parece ser a $\underline{\theta} = 1$ a que mais se afasta da solução exacta, e a $\underline{\theta} = 1/2$ a escolha que garante as soluções mais precisas. De notar, no entanto, que para valores intermédios do passo de tempo normalizado (e.g., $\Delta\tau \in [1.5, 2.5]$), a melhor solução é obtida com $\underline{\theta} = 2/3$. Em todos os casos analisados, o método de Euler directo é o menos exacto.

Após um estudo de estabilidade dos resultados obtidos em problemas transitórios bidimensionais, o valor $\underline{\theta} = 1/2$ (método de Crank-Nicolson) foi utilizado em todos os testes numéricos apresentados neste trabalho. No entanto, a escolha do parâmetro $\underline{\theta}$ é livre na implementação do algoritmo, conforme mostrado no capítulo 6.

Capítulo 4

Formulações

4.1 Elementos finitos híbridos-Trefftz para o problema homogéneo

4.1.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é o desenvolvimento de elementos finitos híbridos-Trefftz para a resolução da forma homogénea do problema (3.9), sujeito às condições de fronteira (3.10) e (3.11). Assim, a equação a resolver no domínio Ω para cada passo de tempo Δt é definida por,

$$\nabla^2 T_{\Delta t}(\mathbf{x}) + \omega^2 T_{\Delta t}(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.1)$$

Por motivos de simplificação da notação, o índice Δt é agora removido para o resto do trabalho.

Para resolver a equação (4.1) recorre-se à discretização do domínio Ω num conjunto de elementos finitos. Em cada elemento, aproximam-se individualmente os campos de temperaturas através de bases de aproximação que satisfazem a equação diferencial governativa (condição de Trefftz), mas não as condições de fronteira. Em cada fronteira em que não se conhecem os fluxos de calor normais, aproximam-se os mesmos usando bases de aproximação que podem-se escolher livremente.

A formulação é obtida impondo em forma fraca as equações governativas nos domínios dos elementos e as condições de compatibilidade das temperaturas nas fronteiras essenciais da malha. As bases de aproximação das temperaturas e fluxos normais de calor são utilizadas como funções de ponderação.

4.1.2 Discretização no espaço

Considere que o domínio Ω foi dividido em elementos finitos, conforme ilustrado na figura 4.1.

Nas fronteiras entre esses elementos devem ser impostas condições de continuidade de temperaturas e fluxos normais de calor. A temperatura numa fronteira interior

deve ser igual para os elementos i e j que partilham essa fronteira,

$$T_i(\mathbf{x}) - T_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{na fronteira } \Gamma_i \quad (4.2)$$

Os fluxos normais de calor devem ter igual valor em módulo e sinais opostos,

$$\mathbf{n}_i \mathbf{q}_i(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_j \mathbf{q}_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{na fronteira } \Gamma_i \quad (4.3)$$

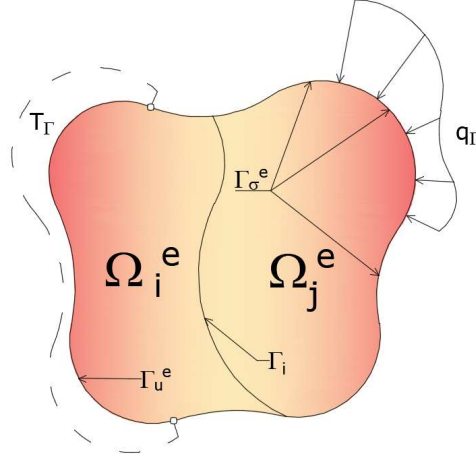


Figura 4.1: Malha de elementos finitos e fronteiras de Neumann, Dirichlet e interiores.

Os elementos finitos híbridos-Trefftz apresentam flexibilidade em relação à forma e tipo de elementos, sendo aplicáveis para qualquer geometria, contornos e admitindo malhas não conformes.

4.1.3 Bases de aproximação

Bases no domínio

No domínio de cada elemento é aproximado directamente o campo de temperaturas por uma combinação linear de funções $\mathbf{U}(\mathbf{x})$. A solução aproximada do campo de temperatura é dada pela expressão,

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{X} \quad \text{no } \Omega^e \quad (4.4)$$

sendo Ω^e o domínio do elemento respectivo.

A base $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ satisfaz a condição de Trefftz (4.1), ou seja, a forma homogénea da equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}) + \omega^2 \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

As soluções de campo livre da equação (4.5) são bem conhecidas em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 [37]. É conveniente escrever a equação (4.5) no referencial polar (r, θ) ,

$$\left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right) + \omega^2 U_n = 0 \quad (4.6)$$

sendo U_n a função n da base de aproximação $\mathbf{U}(\mathbf{x})$.

A equação (4.6) admite soluções do tipo (4.7),

$$U_n(r, \theta) = J_n(\omega r) e^{in\theta} \quad (4.7)$$

onde $J_n(r, \theta)$ é uma função desconhecida, que se pretende determinar.

Usando a notação $z = \omega r$, obtém-se a equação de Bessel (4.8) substituindo a equação (4.7) na equação (4.6), com as regras de diferenciação,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_n}{\partial r} &= \omega \frac{\partial U_n}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 J_n}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial J_n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) J_n &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

As soluções da equação (4.8) são as funções de Bessel de ordem n e argumento $z = \omega r$.

Uma aproximação dos fluxos de calor no domínio é obtida da aproximação (4.4), impondo a lei de Fourier (2.7),

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{X} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = -k\nabla\mathbf{U}(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

Resolvendo a equação (4.10) no referencial polar (r, θ) , e usando as igualdades (4.11) e (4.12), resulta no conjunto de equações,

$$\frac{\partial J_n}{\partial z} = \frac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) \quad (4.11)$$

$$\frac{n}{z} J_n(z) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{S}(r, \theta) = -\frac{1}{2}k\omega \begin{pmatrix} J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \\ i(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) \end{pmatrix} e^{in\theta} \quad (4.13)$$

Bases nas fronteiras essenciais

Nas fronteiras essenciais (de Dirichlet e interiores), os fluxos de calor normais são aproximados por uma combinação linear de funções $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{n} \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \mathbf{Y} \quad \text{nas fronteiras } \Gamma_u \cup \Gamma_i \quad (4.14)$$

Para a base de aproximação $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ não existem restrições, com a excepção das condições de independência linear, pelo que para este trabalho foram escolhidas as funções polinomiais de Chebyshev. O vector de pesos \mathbf{Y} não tem restrições da sua dimensão.

A escolha dos polinómios de Chebyshev (4.15) potencia um melhor condicionamento do sistema resolutivo e são funções fáceis de calcular numericamente, pela expressão,

$$Z_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3... \quad (4.15)$$

4.1.4 Equações no domínio

Para determinar as equações no domínio dos elementos finitos, utiliza-se o método dos resíduos pesados de Galerkin, em que a própria base de aproximação é utilizada como funções de peso para a ponderação, conforme explicado no anexo A.

Em cada elemento, impõe-se a equação (4.1) na forma fraca e utilizando $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ como base de ponderação, resulta a equação (4.16), onde $\hat{\mathbf{U}}^T$ é a conjugada transposta da base \mathbf{U} .

$$\int \hat{\mathbf{U}}^T (\nabla^2 T + \omega^2 T) d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

O primeiro termo da equação (4.16) é integrado por partes, para depois surgirem integrais nas fronteiras onde as condições de Dirichlet (2.17) e Neumann (2.18) se possam impor,

$$\int \hat{\mathbf{U}}^T \nabla^2 T d\Omega^e = \int \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} \nabla T) d\Gamma^e - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}^T \nabla T d\Omega^e \quad (4.17)$$

sendo Γ^e o contorno (i.e. o conjunto de todas as fronteiras) do elemento corrente.

Tendo em conta a lei de Fourier (2.7), temos que a equação (4.17) é equivalente a,

$$\int \hat{\mathbf{U}}^T \nabla^2 T d\Omega^e = -\frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} \mathbf{q}) d\Gamma^e - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}^T \nabla T d\Omega^e \quad (4.18)$$

No termo de fronteira da equação (4.18), $\mathbf{n} \mathbf{q}$ representa o fluxo normal nas fronteiras do elemento. Este é conhecido nas fronteiras de Neumann (Γ_σ^e) e dado pela condição (3.10). Sabendo que as fronteiras essenciais correspondem à união das fronteiras de Dirichlet com as fronteiras interiores ($\Gamma_e^e = \Gamma_u^e \cup \Gamma_i^e$) e que o fluxo normal nessas fronteiras é aproximado pela expressão (4.14), tem-se a equação,

$$\int \hat{\mathbf{U}}^T \nabla^2 T d\Omega^e = -\frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T q_\Gamma d\Gamma_\sigma^e - \frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}^T \nabla T d\Omega^e \quad (4.19)$$

Substituindo a equação (4.19) na expressão (4.16) e tendo em conta a aproximação

(4.4), resulta a equação,

$$-\frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{q}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e - \frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}^T \nabla \mathbf{U} d\Omega^e \mathbf{X} + \int \hat{\mathbf{U}}^T \omega^2 \mathbf{U} d\Omega^e \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

Novamente, segue-se a integração por partes do primeiro integral no domínio, resultando,

$$\int \nabla \hat{\mathbf{U}}^T \nabla \mathbf{U} d\Omega^e = \int \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} \nabla \mathbf{U}) d\Gamma^e - \int \hat{\mathbf{U}}^T \nabla^2 \mathbf{U} d\Omega^e \quad (4.21)$$

Ao substituir a relação (4.21) na equação (4.20) e sabendo que \mathbf{S} é dado pela equação (4.10), resulta a equação governativa,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{q}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e - \frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} \\ & + \frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} \mathbf{S}) d\Gamma^e \mathbf{X} + \int \hat{\mathbf{U}}^T (\nabla^2 \mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{U}) d\Omega^e \mathbf{X} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tendo em conta que a base \mathbf{U} satisfaz a equação (4.4), é anulado o integral no domínio da equação (4.22),

$$\int \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} \mathbf{S}) d\Gamma^e \mathbf{X} - \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} = \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{q}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e \quad (4.23)$$

Fazem-se as notações seguintes:

$$\mathbf{D} = \int \hat{\mathbf{U}}^T (\mathbf{n} \mathbf{S}) d\Gamma^e \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B} = \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \quad (4.25)$$

$$\mathbf{q}_\Gamma = \int \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{q}_\Gamma d\Gamma_\sigma^e \quad (4.26)$$

onde a equação (4.24) representa a matriz dinâmica, a equação (4.25) é a matriz de fronteira e a equação (4.26) é vector dos fluxos de calor nas fronteiras.

A equação no domínio dos elementos finitos híbridos-Trefftz pode ser escrita na forma compacta,

$$\mathbf{D}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{q}_\Gamma \quad (4.27)$$

4.1.5 Equações na fronteira

As equações (3.10) e (4.2) são as condições impostas nas fronteiras de Dirichlet e interiores.

Utilizando em forma fraca as funções contidas na base \mathbf{Z} para ponderação, a imposição da equação (3.10) escreve-se,

$$\int \mathbf{Z}^T (T - T_\Gamma) d\Gamma_u^e = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

Substituindo a aproximação (4.4) na equação (4.28), resulta,

$$\int \mathbf{Z}^T \mathbf{U} d\Gamma_u^e \mathbf{X} = \int \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (4.29)$$

Notando que o termo esquerdo da equação (4.29) é a conjugada transposta da matriz de fronteira \mathbf{B} , tem-se,

$$\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{X} = \mathbf{T}_\Gamma; \text{ onde } \mathbf{T}_\Gamma = \int \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e \quad (4.30)$$

Na fronteira interior entre os elementos i e j é imposta a continuidade da temperatura em forma fraca,

$$\int \mathbf{Z}^T (T_\Gamma^i - T_\Gamma^j) d\Gamma_i^e = \mathbf{0}$$

onde substituindo a aproximação (4.4) obtém-se,

$$(\hat{\mathbf{B}}^i)^T \mathbf{X}^i - (\hat{\mathbf{B}}^j)^T \mathbf{X}^j = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

onde \mathbf{X}^i e \mathbf{X}^j são as temperaturas generalizadas ao nível da fronteira que os elementos i e j partilham.

4.1.6 Sistema governativo

O sistema resolutivo é obtido pela junção das equações no domínio (4.27) e nas fronteiras essenciais (4.30),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & -\mathbf{B} \\ -\hat{\mathbf{B}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_\Gamma \\ -\mathbf{T}_\Gamma \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

O sistema (4.32) é Hermitiano, esparso e as temperaturas generalizadas do vector \mathbf{X} dependem estritamente do elemento ao qual pertencem, enquanto os fluxos generalizados, \mathbf{Y} , ocorrem nas fronteiras e são partilhados, por no máximo, 2 elementos adjacentes. A matriz \mathbf{D} é diagonal por blocos que não se somam por elementos adjacentes. Assim, as ordens das bases dos diferentes elementos e fronteiras podem ser diferentes entre si. O aumento de funções nas bases de aproximação não requer calcular novamente as funções anteriores, pois as bases de aproximação têm carácter hierárquico.

4.1.7 Indeterminação estática e cinemática

As ordens das bases de aproximação no domínio e nas fronteiras são de escolha livre, contudo é necessário garantir que o sistema (4.32) seja estática e cinematicamente indeterminado, de forma a ter solução única.

Designando por N_D o número de termos no vector \mathbf{X} , no domínio da estrutura, e por N_Γ o número de termos no vector \mathbf{Y} , nas fronteiras essenciais, o número de

equações no domínio é N_D e o número de incógnitas nessas equações é dado por $N_D + N_\Gamma$.

A condição de indeterminação estática é dada pela expressão,

$$a = (N_D + N_\Gamma) - N_D = N_\Gamma > 0 \quad (4.33)$$

onde a representa o número de indeterminação estática.

Observa-se que o sistema (4.32) é estaticamente indeterminado sempre que tenha, pelo menos, uma fronteira essencial. Para ter um sistema cinematicamente indeterminado, o número de equações de fronteira (N_Γ) tem que ser menor que o número de equações do domínio (N_D). Assim, o número de indeterminação cinemática (b) tem que ser positivo, dado pela equação,

$$b = N_D - N_\Gamma > 0 \quad (4.34)$$

A condição de indeterminação cinemática (4.34) assegura que as temperaturas generalizadas não se podem determinar apenas pelas condições impostas nas fronteiras essenciais. Ao utilizar o operador $>$ em vez de \geq para cada elemento finito, evita-se o condicionamento excessivo das bases de aproximação do domínio pelas condições de fronteiras.

De notar que as condições (4.33) e (4.34) são necessárias, mas não suficientes para garantir que o sistema (4.32) tem solução única. Por isso, para além de respeitar as condições de indeterminação, a formulação aqui apresentada é implementada com um conjunto de procedimentos adicionais que visam o pré-condicionamento e a verificação da estabilidade do sistema, conforme ilustrado na secção 5.2.3.

4.2 Elementos finitos híbridos-Trefftz para o problema não-homogéneo

4.2.1 Objectivo

Este capítulo tem como objectivo obter uma solução aproximada do problema (3.9), reescrito de seguida, sabendo que f_0 dado pela equação (3.8) é diferente de zero, o coeficiente de difusividade térmica α é dado por (3.6) e a frequência generalizada ω dada pela equação (3.7).

$$\nabla^2 T_{\Delta t}(\mathbf{x}) + \omega^2 T_{\Delta t}(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x})$$

Este problema está sujeito às condições de fronteira de Dirichlet (3.10) e de Neumann (3.11), e nas fronteiras entre elementos são aplicadas as condições adicionais de continuidade de temperaturas (4.2) e fluxos de calor (4.3), tal como no problema homogéneo. A condição inicial da temperatura é dada pela equação (2.18).

De maneira a simplificar a notação, o índice Δt vai ser omissa, tendo sempre em conta que a imposição das equações é feita no final do passo de tempo corrente.

4.2.2 Aproximações

Bases de aproximação no domínio

O modelo de temperatura dos elementos híbridos-Trefftz é construído nas aproximações independentes do campo de temperaturas, no domínio de cada elemento, e do campo de fluxos normais de calor, nas fronteiras de Dirichlet e interiores.

No problema não-homogêneo tem-se duas parcelas da solução aproximada do campo de temperaturas, a aproximação da solução complementar e da solução particular, o que resulta,

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{U}_c(\mathbf{x})\mathbf{X}_c + \mathbf{U}_p(\mathbf{x})\mathbf{X}_p \quad \text{no } \Omega^e \quad (4.35)$$

A base de aproximação da solução complementar, $\mathbf{U}_c(\mathbf{x})$, é obtida de forma semelhante ao capítulo 4.1, tendo de satisfazer a condição de Trefftz (4.4). As funções de aproximação da base \mathbf{U}_c são dadas pela equação (4.7).

A base da solução particular deve satisfazer a a forma não homogênea da equação de Helmholtz, pelo que resulta,

$$(\nabla^2 \mathbf{U}_p(\mathbf{x}) + \omega^2 \mathbf{U}_p(\mathbf{x})) \mathbf{X}_p = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) \quad (4.36)$$

No subcapítulo 4.2.3 serão deduzidas as expressões explícitas das funções a incluir na base \mathbf{U}_p através do método da reciprocidade dual (DRM).

Bases de aproximação nas fronteiras essenciais

A aproximação dos fluxos de calor, nas fronteiras de Dirichlet e interiores, é feita como no problema homogêneo, através da equação (4.14), reescrita a seguir,

$$\mathbf{n} \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{Y}$$

Optou-se novamente por usar polinómios de Chebyshev para a base de aproximação \mathbf{Z} , cujos graus podem ser escolhidos livremente pelo utilizador.

4.2.3 Solução particular

Uma vez que o termo fonte (f_0) em regime transitório varia com o passo de tempo, geralmente não se pode encontrar uma solução particular analítica conforme foi realizado na referência [2] para aproximar a solução particular para o problema estacionário. A segunda opção seria usar uma base polinomial, mas esta abordagem gera integrais no domínio, o que compromete uma das vantagens principais do método de Trefftz. Em alternativa, o método da reciprocidade dual foi proposto para resolver este problema, apresentando a vantagem de gerar apenas integrais de fronteira, embora a solução particular assim obtida seja apenas aproximada.

O primeiro passo do método da reciprocidade dual é aproximar o termo fonte (f_0) utilizando o método da colocação (anexo A) e uma base arbitrária. A base de

aproximação da solução particular é obtida posteriormente de maneira a satisfazer a equação de Helmholtz (3.9), na qual a aproximação do termo fonte substitui o termo não homogéneo. Uma vez obtida a solução particular em todos os elementos, a solução complementar é aproximada de maneira a satisfazer, em forma fraca, a equação (3.9), resultando assim a formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz apresentada na secção 4.2.4.

Dependendo da escolha da base de aproximação do termo fonte f_0 , as funções de aproximação contidas na base \mathbf{U}_p podem ter expressões matemáticas muito complicadas e, por vezes, singulares. É esse o caso, por exemplo, das funções radiais do tipo *spline*, muito utilizadas na literatura [37]. Por outro lado, a abordagem proposta aqui usa a mesma base de aproximação para o termo fonte e a solução particular, eliminando completamente esse problema. Ao mesmo tempo, o método é convergente e as bases são completas [42].

Aproximação do termo fonte por colocação

Em cada elemento, o termo fonte (f_0) é dado pela expressão (3.8), é aproximado através da colocação num conjunto de pontos $\bar{\mathbf{x}} \in \Omega^e$,

$$\mathbf{f}_0(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{X}_p \quad (4.37)$$

onde \mathbf{F} é a base de aproximação do termo fonte que tem que satisfazer, nesta formulação, a equação homogénea de Helmholtz,

$$\nabla^2 \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) + \lambda^2 \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

Na equação (4.38), λ é um ou um conjunto de parâmetros arbitrários diferentes da frequência ω . Assim, a base \mathbf{F} é um conjunto de funções semelhantes às usadas para resolver o problema homogéneo e obtidas aqui em coordenadas polares,

$$F_n(r, \theta) = J_n(\lambda r) e^{in\theta} \quad (4.39)$$

A expansão do termo fonte numa base do tipo (4.39) equivale a uma decomposição numa série de Dini na direcção radial e em funções harmónicas na direcção tangencial. As suas propriedades de convergência e robustez foram comprovadas na referência [42].

Os pesos \mathbf{X}_p da aproximação (4.37) são obtidos através da colocação do valor exacto do termo fonte (f_0) numa quadratura de Gauss-Legendre, concebida de modo a garantir que o sistema de colocação nunca é sub-determinado.

Base de aproximação da solução particular

Para a equação (4.36) ser verificada nos pontos de colocação, basta agora procurar uma base \mathbf{U}_p que satisfaça a equação,

$$(\nabla^2 \mathbf{U}_p(\bar{\mathbf{x}}) + \omega^2 \mathbf{U}_p(\bar{\mathbf{x}})) \mathbf{X}_p = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{X}_p \quad (4.40)$$

Para satisfazer esta equação basta resolver, de forma analítica, a equação,

$$\nabla^2 \mathbf{U}_p(\bar{\mathbf{x}}) + \omega^2 \mathbf{U}_p(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4.41)$$

Para a base de aproximação da solução particular, \mathbf{U}_p , satisfazer a equação (4.41), procuram-se soluções do tipo,

$$\mathbf{U}_p = \xi \mathbf{F} \quad (4.42)$$

Para determinar a constante ξ substitui-se a definição (4.42) na equação (4.41), resultando na equação,

$$\xi \nabla^2 \mathbf{F} + \xi \omega^2 \mathbf{F} = \mathbf{F}$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} + \left(\frac{\xi \omega^2 - 1}{\xi} \right) \mathbf{F} = \mathbf{F} \quad (4.43)$$

Sabendo a propriedade (4.38), a equação (4.43) é satisfeita se a constante ξ for dada pela expressão,

$$\frac{\xi \omega^2 - 1}{\xi} = \lambda^2$$

$$\xi = \frac{1}{\omega^2 - \lambda^2}; \text{ com } \omega^2 \neq \lambda^2 \quad (4.44)$$

Substituindo a constante ξ dada pela expressão (4.44) na equação (4.42) tem-se a base da solução particular,

$$\mathbf{U}_p = \left(\frac{1}{\omega^2 - \lambda^2} \right) \mathbf{F} \quad (4.45)$$

Desta maneira, a organização e dimensão da base \mathbf{U}_p são idênticas às da base \mathbf{F} .

A propriedade (4.45) é a característica principal da variante do método da reciprocidade dual apresentada neste trabalho, porque preserva o integral na fronteira típico da formulação dos elementos finitos Trefftz, enquanto evita dificuldades associadas a expressões complicadas das bases da solução particular adoptada por outros autores [37].

Pela definição (4.35) e impondo a lei de Fourier (2.7), chega-se à aproximação de fluxos de calor no domínio,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}_c(\mathbf{x}) \mathbf{X}_c + \mathbf{S}_p(\mathbf{x}) \mathbf{X}_p \quad (4.46)$$

$$\text{com } \begin{cases} \mathbf{S}_c(\mathbf{x}) = -k \nabla \mathbf{U}_c(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}_p(\mathbf{x}) = -k \nabla \mathbf{U}_p(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Em coordenadas polares, as expressões explícitas das funções genéricas \mathbf{S}_{cn} e \mathbf{S}_{pn} são,

$$\mathbf{S}_{cn}(r, \theta) = -\frac{1}{2} k \omega \left(\frac{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)}{i(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z))} \right) e^{in\theta} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{S}_{\text{pn}}(r, \theta) = -\frac{k\lambda}{2(\omega^2 - \lambda^2)} \begin{pmatrix} J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \\ i(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) \end{pmatrix} e^{in\theta} \quad (4.48)$$

4.2.4 Solução complementar

Uma vez conhecida a solução particular no domínio de cada elemento, pode-se proceder à definição das equações no domínio e nas fronteiras essenciais de modo a obter o sistema resolutivo da solução complementar.

As temperaturas generalizadas \mathbf{X}_c correspondentes à base da solução complementar e os pesos \mathbf{Y} correspondentes à base de aproximação do fluxo normal de calor (4.14), são obtidas impondo de forma fraca a equação de Helmholtz (3.9), no domínio de cada elemento, e as condições de compatibilidade de temperatura das equações (3.10) e (4.2), nas fronteiras essenciais da malha.

Equações no domínio

Impondo a equação (3.8) de forma fraca e utilizando as funções da base de aproximação do campo de temperaturas \mathbf{U}_c para ponderação, obtém-se,

$$\int \hat{\mathbf{U}}_c^T (\nabla^2 T + \omega^2 T) d\Omega^e = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T f_0 d\Omega^e \quad (4.49)$$

Primeiro integra-se por partes a primeira parcela do integral da equação (4.49) e substituem-se nos termos de fronteira resultantes os fluxos de calor (3.11) impostos nas fronteiras de Neumann e as aproximações (4.14) dos mesmos nas fronteiras essenciais da malha,

$$\int \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla^2 T d\Omega^e = -\frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}_c^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma}^e - \frac{1}{k} \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \mathbf{Y} - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla T d\Omega^e \quad (4.50)$$

Fazendo as notações:

$$\mathbf{q}_{\Gamma} = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T q_{\Gamma} d\Gamma_{\sigma}^e \quad (4.51)$$

$$\mathbf{B}_c = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \quad (4.52)$$

e substituindo as aproximações (4.35) e (4.37) na equação (4.50), obtém-se a equação,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k} \mathbf{q}_{\Gamma} - \frac{1}{k} \mathbf{B}_c \mathbf{Y} - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla \mathbf{U}_c d\Omega^e \mathbf{X}_c - \int \nabla \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla \mathbf{U}_p d\Omega^e \mathbf{X}_p \\ & + \omega^2 \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{U}_c d\Omega^e \mathbf{X}_c + \omega^2 \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{U}_p d\Omega^e \mathbf{X}_p = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{F} d\Omega^e \mathbf{X}_p \end{aligned} \quad (4.53)$$

Integrando por partes as componentes $\int \nabla \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla \mathbf{U}_c d\Omega^e$ e $\int \nabla \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla \mathbf{U}_p d\Omega^e$ tem-se a equação,

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{k}\mathbf{q}_\Gamma - \frac{1}{k}\mathbf{B}_c \mathbf{Y} \\
& - \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{n} \nabla \mathbf{U}_c d\Gamma^e \mathbf{X}_c + \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla^2 \mathbf{U}_c d\Omega^e \mathbf{X}_c + \omega^2 \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{U}_c d\Omega^e \mathbf{X}_c \\
& - \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{n} \nabla \mathbf{U}_p d\Gamma^e \mathbf{X}_p + \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \nabla^2 \mathbf{U}_p d\Omega^e \mathbf{X}_p + \omega^2 \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{U}_p d\Omega^e \mathbf{X}_p \\
& = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{F} d\Omega^e \mathbf{X}_p
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Tendo em conta as propriedades (4.4) e (4.41), os integrais no domínio presentes na expressão (4.54) anulam-se, ficando com uma formulação inteiramente definida nas fronteiras,

$$-\mathbf{q}_\Gamma - \mathbf{B}_c \mathbf{Y} + \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{n} \mathbf{S}_c d\Gamma^e \mathbf{X}_c + \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{n} \mathbf{S}_p d\Gamma^e \mathbf{X}_p = \mathbf{0} \tag{4.55}$$

Fazendo as notações,

$$\mathbf{D}_c = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{n} \mathbf{S}_c d\Gamma^e \tag{4.56}$$

$$\mathbf{D}_p = \int \hat{\mathbf{U}}_c^T \mathbf{n} \mathbf{S}_p d\Gamma^e \tag{4.57}$$

a equação governativa dos elementos finitos híbridos-Trefftz no domínio fica,

$$\mathbf{D}_c \mathbf{X}_c - \mathbf{B}_c \mathbf{Y} = \mathbf{q}_\Gamma - \mathbf{D}_p \mathbf{X}_p \tag{4.58}$$

Equações nas fronteiras essenciais

As condições de fronteira (3.10) e (4.2) são impostas de forma fraca, utilizando a base \mathbf{Z} para ponderação.

Nas fronteiras de Dirichlet, tem-se a equação,

$$\int \mathbf{Z}^T (T - T_\Gamma) d\Gamma_u^e = \mathbf{0} \tag{4.59}$$

Substituindo a aproximação (4.35) do campo das temperaturas na equação (4.59), fica-se com a equação,

$$\int \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_c d\Gamma_u^e X_c + \int \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_p d\Gamma_u^e X_p - \int \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e = \mathbf{0} \tag{4.60}$$

Fazendo as notações,

$$\mathbf{B}_p = \int \hat{\mathbf{U}}_p^T \mathbf{Z} d\Gamma_e^e \tag{4.61}$$

$$\mathbf{T}_\Gamma = \int \mathbf{Z}^T T_\Gamma d\Gamma_u^e \tag{4.62}$$

e utilizando a definição (4.52), obtém-se a equação nas fronteiras de Dirichlet,

$$\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{c}}^T \mathbf{X}_{\mathbf{c}} = \mathbf{T}_{\Gamma} - \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}^T \mathbf{X}_{\mathbf{p}} \quad (4.63)$$

Impõe de forma fraca a compatibilidade (4.2) entre os elementos i e j , para as fronteiras inter-elementares, obtendo a equação,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{Z}^T (T^i - T^j) d\Gamma_i^e &= 0 \\ \int \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_{\mathbf{c}}^i d\Gamma_i^e \mathbf{X}_{\mathbf{c}}^i + \int \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_{\mathbf{p}}^i d\Gamma_i^e \mathbf{X}_{\mathbf{p}}^i - \int \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_{\mathbf{c}}^j d\Gamma_i^e \mathbf{X}_{\mathbf{c}}^j - \int \mathbf{Z}^T \mathbf{U}_{\mathbf{p}}^j d\Gamma_i^e \mathbf{X}_{\mathbf{p}}^j &= 0 \\ \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{c}}^{T^i} \mathbf{X}_{\mathbf{c}}^i - \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{c}}^{T^j} \mathbf{X}_{\mathbf{c}}^j &= -\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}^{T^i} \mathbf{X}_{\mathbf{p}}^i + \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}^{T^j} \mathbf{X}_{\mathbf{p}}^j \end{aligned} \quad (4.64)$$

Sistema governativo

O sistema resolutivo do problema não-homogêneo reúne as equações (4.58) e (4.63) (ou (4.64) para o caso das fronteiras interiores),

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{c}} & -\mathbf{B}_{\mathbf{c}} \\ -\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{c}}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{\mathbf{c}} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\Gamma} - \mathbf{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{X}_{\mathbf{p}} \\ -\mathbf{T}_{\Gamma} + \hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}^T \mathbf{X}_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

O lado direito do sistema tem dois termos que tornam o sistema (4.65) diferente do sistema (4.32) do problema homogêneo, $\mathbf{D}_{\mathbf{p}} \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$ e $\hat{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}}^T \mathbf{X}_{\mathbf{p}}$. O lado esquerdo do sistema (4.65) é o mesmo para todos os passos de tempo, pelo que só necessita ser calculado uma vez.

O sistema (4.65) é Hermitiano, esparsa, simétrico e fortemente localizado, visto que as variáveis de temperatura são específicas do elemento e as variáveis do fluxo normal de calor apenas podem ser partilhadas por duas fronteiras vizinhas, no máximo. Além disso, os coeficientes do sistema são definidos apenas por expressões de integrais nas fronteiras.

Obtida a solução do sistema (4.65), os campos de temperatura e fluxos de calor no domínio dos elementos são recuperados usando as aproximações (4.35) e (4.46).

Capítulo 5

Implementação dos elementos finitos híbridos-Trefftz

5.1 Introdução

A implementação numérica dos elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura para problemas cujos campos de temperatura e fluxos de calor variam no tempo foi feita na plataforma *FreeHyTE* [45]. A sua característica modular permite a implementação de novas aplicações. A plataforma *FreeHyTE* oferece um enquadramento computacional uniformizado que facilita a implementação das formulações de elemento finitos híbridos e híbridos-Trefftz para problemas bidimensionais. Esta plataforma foi desenvolvida e melhorada em trabalhos anteriores, fornecendo uma abordagem eficiente e uniforme para a manipulação da informação associada a cada formulação sem perder a capacidade de adaptação à especificidade da mesma.

O sistema utiliza três tipos de estruturas de dados, **Loops**, **Edges** e **Bconds**, uma topológica para a definição do domínio e a combinação desta informação com o material, os campos impostos, os resultados e as bases de aproximação, organizando a informação de forma eficiente ao longo das várias fases de cálculo [2, 4].

O presente capítulo está organizado de forma a mostrar a implementação computacional da formulação especificada nos capítulos 4.1 e 4.2 na plataforma *FreeHyTE*, em ambiente *MATLAB*. Tendo em consideração a formulação do capítulo 4.1, o objectivo da implementação dos elementos híbridos-Trefftz é obter a solução homogénea do problema (4.32). Para a implementação da formulação apresentada no capítulo 4.2, devem ser previamente construídos os sistemas particular e complementar com o objectivo é primeiro obter a solução particular e depois resolver o sistema governativo (4.65) para obter a solução não homogénea do problema.

A metodologia geral para a implementação dos elementos finitos começa pelo pré-processamento (definição da geometria e geração da malha), seguindo o processamento para a montagem do sistema resolutivo e a sua resolução. Por fim, o

pós-processamento inclui a construção dos campos de temperatura e fluxos de calor e a sua representação gráfica. Detalhes com carácter geral, como a identificação dos sistemas de referência usados, as descrições das estruturas de dados e as funções do programa computacional são apresentados no anexo C.

5.2 Solução homogénea

Nesta secção apresenta-se a implementação da formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura para problemas homogéneos derivada do capítulo 4.1. Esta secção foi adaptada da referência [2], com a alteração das funções de aproximação e a adição da variável da frequência generalizada e de características do material necessárias para a construção das bases de aproximação de temperaturas no domínio (4.7) e nas fronteiras essenciais (4.15). Pela lei de Fourier, o fluxo normal de calor no domínio é calculado pelas expressões (4.9) e (4.13).

Na figura 5.1 pode-se observar o fluxograma simplificado da implementação do problema homogéneo.

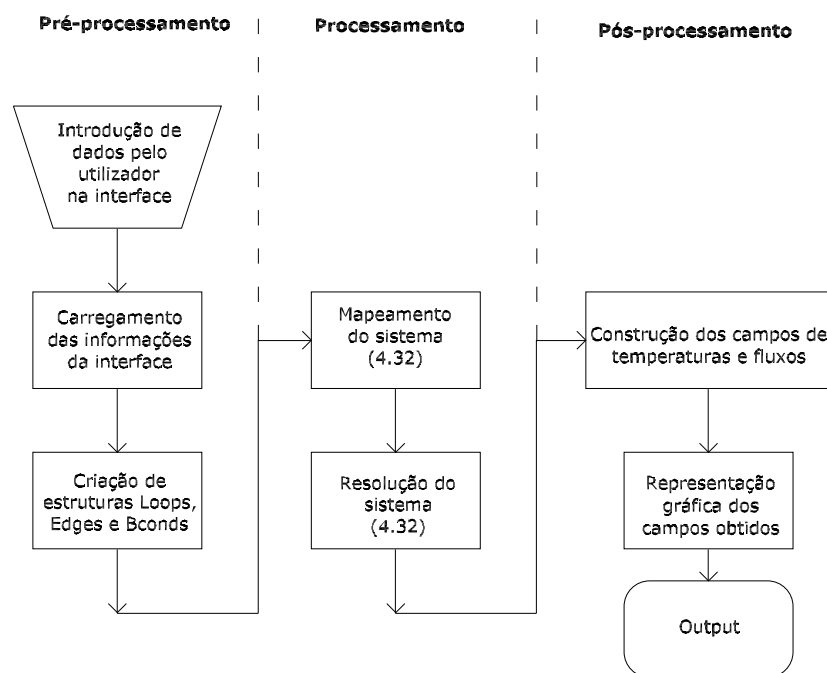


Figura 5.1: Fluxograma de implementação do problema homogéneo.

5.2.1 Pré-processamento

O pré-processamento consiste na introdução dos dados para a definição do problema. Para facilitar esta tarefa, o programa *FreeHyTE* disponibiliza interfaces gráficas.

Nas interfaces são inseridos os dados de *input* do sistema, nomeadamente as definições da geometria da estrutura, da malha, das bases de aproximação, dos tipos de fronteiras exteriores (Dirichlet ou Neumann) e das temperaturas e/ou fluxos de calor impostos nessas fronteiras.

As informações provenientes das interfaces gráficas são guardadas nas estruturas de dados **Edges** (informação relativa às fronteiras), **Loops** (informação relativa aos elementos) e **BConds**, (informação relativa à temperatura e fluxos de calor impostos). As estruturas de dados **Edges** e **Loops** têm atributos topológicos comuns a todas as formulações implementadas no *FreeHyTE* e atributos não topológicos que se adaptaram à especificidade da formulação. A informação topológica é processada na função *InputProc* (anexo C.3) a partir da informação obtida da interface sobre a geometria e definição do problema. A estrutura **BConds** tem as variáveis *Dirichlet* e *Neumann* para definir as condições de fronteira em forma de vectores. Os membros das estruturas de dados são detalhados na tabela 5.1. A descrição de cada atributo e das funções são apresentadas no anexo C.

Na variável *material*, as características do material já existentes são a condutividade térmica (k) e o calor gerado internamente (Q), e as novas características inseridas nesta variável são o calor específico (c), a densidade (ρ) e a difusividade térmica (α). Foi introduzida na função *InputProc* a frequência generalizada ω , onde as estruturas da tabela 5.1 são inicializadas e se guarda. Todas estas alterações foram feitas manualmente, sendo futuros campos a preencher na interface.

Tabela 5.1: Estruturas de dados de **Edges** e **Loops** e **BConds** [2]

Edges (atributos)	Loops (atributos)	BConds (atributos)
Edges.nini	Loops.nodes	BConds.Dirichlet
Edges.nfin	Loops.edges	BConds.Neumann
Edges.parametric	Loops.center	
Edges.lleft	Loops.area	
Edges.lright	Loops.material	
Edges.type	Loops.order	
Edges.order	Loops.dim	
Edges.dim	Loops.insert	
Edges.insert		

Um exemplo de uma malha regular é apresentado na figura 5.2 com a identificação dos elementos (Loops) e as suas fronteiras (Edges). Existe também a possibilidade de escolher utilizar uma malha triangular para criar modelos irregulares usando o *PDEtools*.

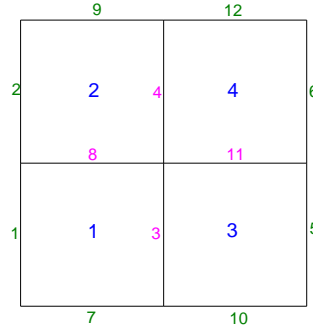


Figura 5.2: Malha com o número de cada elemento e fronteira.

5.2.2 Processamento

A fase do processamento corresponde à construção e à resolução do sistema governativo (4.32). O armazenamento do sistema é feito com base em sub-matrizes ou blocos associados aos respectivos elementos finitos e fronteiras. Na função **AssignParts**, os vectores **dim** e **insert** das estruturas **Loops** e **Edges** são calculadas e são responsáveis pelo mapeamento do sistema (figura 5.3), definindo a informação da localização do primeiro ponto de cada matriz e da sua respectiva dimensão.

Os atributos **order** das estruturas **Loops** e **Edges** são utilizados para guardar a ordem das funções de aproximação do domínio n_D e das fronteiras n_Γ . Os atributos **dim** das estruturas **Loops** ($\text{dim} = N_D$) e **Edges** ($\text{dim} = N_\Gamma$) são calculados da seguinte forma:

$$N_D = 2n_D + 1 \quad (5.1)$$

$$N_\Gamma = n_\Gamma + 1 \quad (5.2)$$

Na figura 5.3(a) ilustra-se o mapeamento do sistema que corresponde à malha apresentada na figura 5.2. Os pontos azuis são valores não nulos do sistema, que é visivelmente esparsa e simétrica. O mapeamento do sistema (4.32) é apresentado com a matriz D , que contém as matrizes delimitadas a vermelho para cada elemento, e as matrizes $-\hat{\mathbf{B}}^T$ para cada fronteira, representadas na figura como $-\mathbf{B}^*$ e delimitadas a preto, tendo sido impostas apenas fronteiras de Dirichlet.

As sub-matrizes dos elementos \mathbf{D} e das fronteiras \mathbf{B} do sistema (4.32) são guardadas nas suas respectivas posições da matriz dos coeficientes, denominada de **LHS** - left hand side. O vector livre do mesmo sistema é preenchido com \mathbf{q}_Γ , dada pela equação (4.27), e \mathbf{T}_Γ , obtido pela equação (4.30), e guardado no vector **RHS** - right hand side.

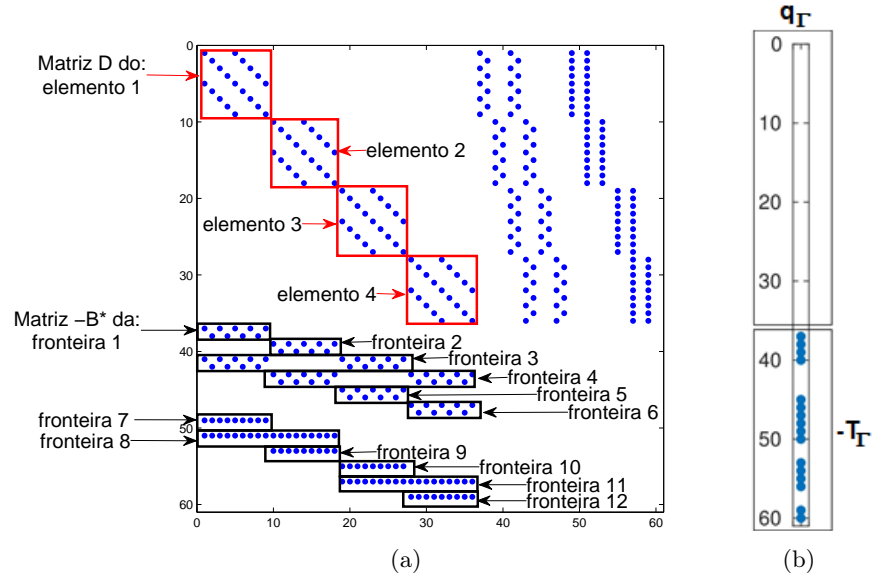


Figura 5.3: Mapeamento do sistema: a) Disposição dos blocos na matrix dos coeficientes (**LHS**); b) Vector livre (**RHS**).

5.2.3 Solução do sistema resolutivo

A plataforma *FreeHyTE* usa o algoritmo *mldivide* do *MATLAB* para a resolução de sistemas bem condicionados, i.e., a inversa do número de condição da matriz dos coeficientes é maior que a precisão do computador usado para a análise.

Os elementos híbridos-Trefftz são muito convergentes para a solução exacta quando se utiliza elevado refinamento p , mas em contrapartida existe mais propensão para situações de instabilidade das soluções do que nos elementos finitos convencionais. O sistema resolutivo (4.32) é considerado instável se a inversa do seu número de condição for inferior à precisão da máquina.

Uma das formas para melhorar o número de condição da matriz dos coeficientes consiste em aplicar um pré-condicionador antes da solução do sistema. O método usado para este efeito visa normalizar o sistema de tal forma que os elementos da diagonal principal passam a ter valor unitário.

Considerando um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com uma matriz quadrada e Hermitiana (\mathbf{A}), e dois vectores (\mathbf{x} e \mathbf{b}), recorre-se à matriz \mathbf{S} de modo a escalar este sistema [2, 44], uma matriz diagonal com os termos dados pela equação,

$$S_{ii} = A_{ii}^{-1/2} \quad (5.3)$$

Os termos escalados são dados pelas equações,

$$\mathbf{A}_s = \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{A} \mathbf{S}; \quad \mathbf{x}_s = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}; \quad \mathbf{b}_s = \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{b} \quad (5.4)$$

A solução do sistema inicial é equivalente ao resolver o sistema escalado $\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{b}_s$, seguido pelo cálculo da solução $\mathbf{x} = \mathbf{S} \mathbf{x}_s$. No entanto, o sistema escalado é bastante mais estável do que o original, preservando, ao mesmo tempo, as suas propriedades de esparsidade e simetria. Com este pré-condicionamento, a matriz **LHS** transforma-se na matriz escalada **ScLHS**.

Para detectar problemas mal condicionados usam-se dois procedimentos, a análise do número de condição ou a análise dos valores singulares.

O primeiro procedimento calcula o número de condição da matriz dos coeficientes. Caso o número de condição for menor que a precisão do computador, o sistema é resolvido utilizando método de Moore-Penrose, que consiste na pseudo-inversa da matriz dos coeficientes. Este método permite a eliminação de valores singulares inferiores a um certo limite.

O segundo procedimento para detectar um sistema mal condicionado baseia-se nas descontinuidades e alinhamento entre valores singulares consecutivos. Quando esta descontinuidade for superior a um determinado valor, este é marcado como o primeiro 'outlier' e são eliminados os valores singulares a partir do mesmo.

Neste caso, para a resolução do sistema escalado **ScLHS** dependendo do número de condição do sistema, usa-se um dos dois algoritmos: a decomposição **LU** ou **pinv**. Se o número de condição do sistema for maior que a precisão do computador, o algoritmo usado é a decomposição LU, caso contrário a matriz pseudo-inversa (Moore-Penrose) é calculada com o algoritmo **pinv**.

O cálculo dos integrais do sistema resolutivo é feito recorrendo a uma técnica de integração numérica baseada no método de Gauss-Legendre. O domínio de integração representa-se pela fronteira, ficando mapeada num intervalo $s \in [-1, 1]$. Para a função genérica $f(s)$ tem-se,

$$I = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(s) ds = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{gc} W_i(s_i) f_i(s_i) ds \quad (5.5)$$

onde L é o comprimento da fronteira, gc é o número de pontos de Gauss-Legendre, s_i são as abcissas correspondentes a esses pontos e W_i são os pesos respectivos.

5.2.4 Pós-processamento

No pós-processamento são construídas, com base na solução obtida no processamento, as aproximações dos campos de temperatura e fluxos de calor em cada ponto da estrutura. Esta solução é guardada na estrutura **Loops** pela função **ComputeFields** para apresentar graficamente os resultados com a função **PlotFields**, descritas no anexo C.3.

Pode-se utilizar os resultados obtidos para processamento posterior, como por exemplo no TecPlot, pois são guardados num ficheiro DAT todos os valores de

temperatura e fluxos de calor dos campos obtidos em todos os pontos.

5.3 Solução não homogênea

Os elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura são aqui estendidos para problemas dependentes do tempo e tendo em conta a solução complementar e particular. As alterações principais são a discretização no tempo e a adição mais elementos nas estruturas de dados do programa para obter as soluções das aproximações de temperatura (4.35) e fluxos de calor (4.46) no domínio. A parte das estruturas relacionadas com a informação topológica e os procedimentos para manipulação da malha são os mesmos, já que são gerais e não interferem com a especificidade de cada aplicação. Os atributos das estruturas de dados foram alterados para inserir a informação relacionada com a discretização no tempo e manipulação da solução complementar e particular.

Esta secção está organizada de forma a mostrar a implementação da formulação híbrida-Trefftz e o funcionamento do programa computacional em três etapas: pré-processamento, processamento e pós processamento. São também apresentadas as grandes diferenças em relação à secção anterior.

Na figura 5.4 apresentam-se todos os passos dos procedimentos no programa, referindo o pré-processamento, o processamento e pós-processamento.

Para uma melhor compreensão do funcionamento do programa, encontram-se no anexo C as funções implementadas e as respectivas descrições.

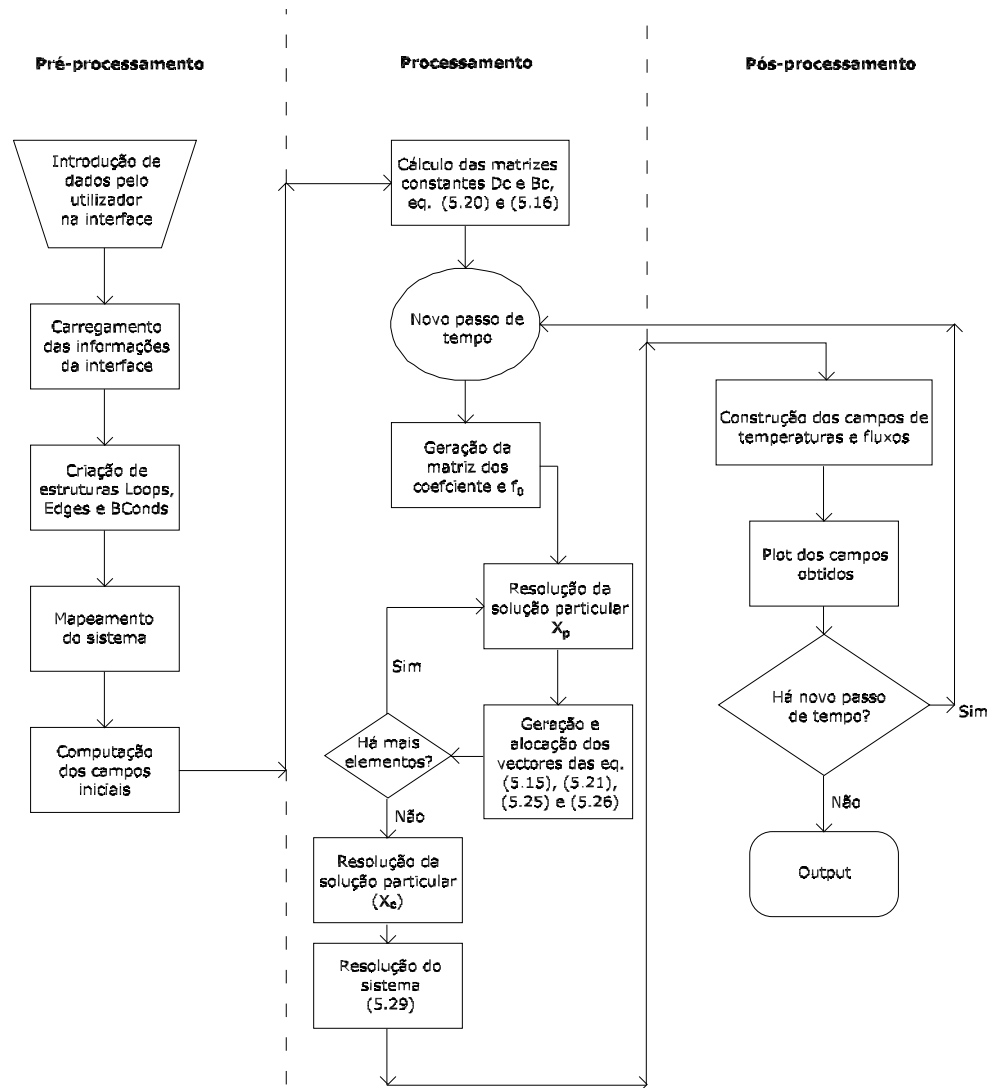


Figura 5.4: Fluxograma de implementação do problema não homogêneo.

5.3.1 Pré-processamento

No pré-processamento, além dos dados de *input* mencionados na secção 5.2, também são escolhidos as características do material (ρ , c , k), o passo de tempo, o tempo final e de quantos em quantos passos de tempo se quer apresentar o gráfico dos resultados. Estas alterações foram implementadas na interface gráfica representada na figura 5.5.

The screenshot shows the 'TIHeatStructDef' window with the title 'FreeHyTE - Parabolic PDE'. The main area is titled 'Structure definition (except boundary conditions)'. It contains the following sections:

- Equation:** $k \cdot \nabla^2 T(x, y, t) + Q(x, y, t) = \rho c \dot{T}(x, y, t)$
- Algorithmic definitions:**
 - Mesh generation: Regular mesh, rectangular elements
 - Number of Gauss points: 20
 - Plot requested every: 5 steps
- Geometry and meshing:**
 - Dimension in x: 1
 - Dimension in y: 1
 - Number of elements in x: 2
 - Number of elements in y: 2
- Time integration & initial:**
 - Calibration parameter θ : 0.5
 - Time step: 0.25
 - Total time: 5
 - Initial temperature, $T_0(x,y)$: 0
 - Time derivative of the initial temperature: 0
- Domain and boundary bases:**
 - Domain order (complementary): 13
 - Domain order (particular): 6
 - Particular solution wave numbers: 1, 2, 3
 - Edges order: 4
- Material properties & heat source:**
 - Heat conductivity, k : 1
 - Density, ρ : 2
 - Specific heat, c : 3
 - Heat source, $Q(x,y,t)$: 0

At the bottom, there is a 'Browse' button for saving results and 'Reset' and 'Next' buttons.

(a) Primeiro passo: definição da geometria (regular ou triangular), da ordem das bases de aproximação, do parâmetro θ , do passo de tempo, tempo total, temperatura inicial e das características do material.

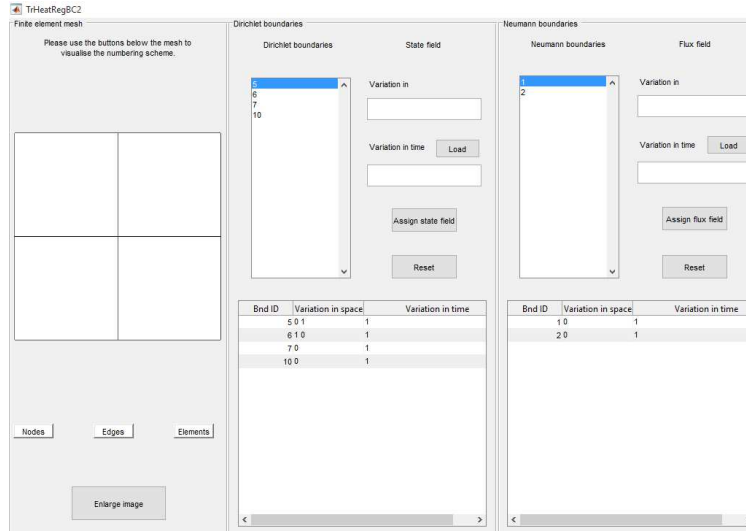
The screenshot shows the 'TIHeatRegBC1' window with the title 'Boundary types'. It contains the following sections:

- Finite element mesh:** A diagram showing a 2x2 grid of rectangular elements. Below it are buttons for 'Nodes', 'Edges', and 'Elements'.
- External boundaries:** A list of boundary IDs (2, 5, 6, 7, 9, 10, 12) with a scroll bar.
- Define the type of external boundary:** A dropdown menu set to 'Dirichlet' and an 'Assign type' button.
- Boundary ID / Boundary Type table:**

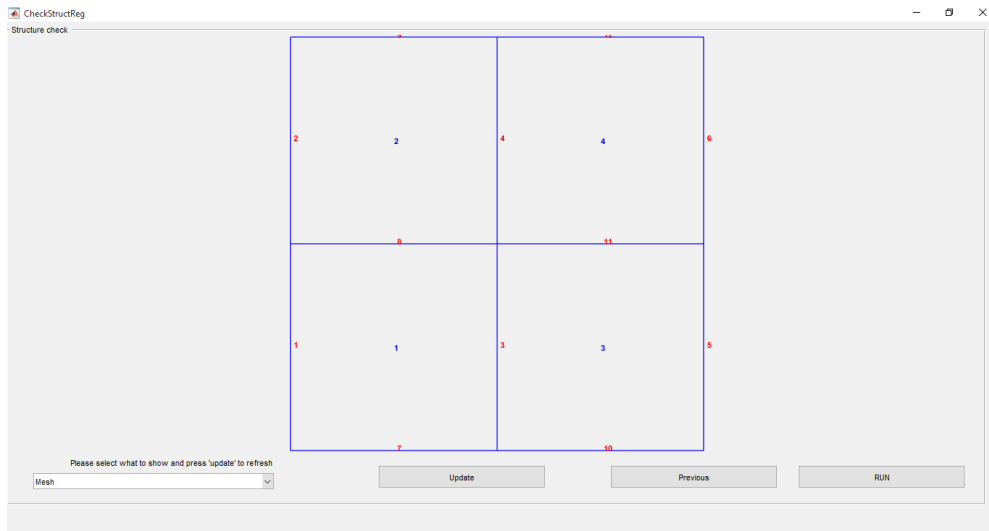
Boundary ID	Boundary Type
1	Neumann
2	Neumann
5	Dirichlet
6	Dirichlet
7	Dirichlet
9	Robin
10	Dirichlet
12	Robin

At the bottom, there are 'Enlarge image', 'Previous', 'Reset', and 'Next' buttons.

(b) Segundo passo: definição do tipo de fronteiras.



(c) Terceiro passo: Imposição de temperaturas nas fronteiras Dirichlet, imposição de fluxos de calor nas fronteiras de Neumann (com variação espacial e temporal).



(d) Quarto passo: Verificação e inicialização da resolução do problema definido.

Figura 5.5: Interface (GUI) para a definição do problema.

A estrutura de dados **Loops** da tabela 5.1 passa a ter informações adicionais, nomeadamente as variáveis da tabela 5.2. As variáveis **order** e **dim** desta estrutura, que foram usadas no problema não homogêneo, são suprimidas e passa-se a utilizar a ordem das funções e a dimensão para a solução complementar e particular.

O utilizador escolhe a ordem n_p para a base F e escolhe os valores para os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_3 na interface representada na figura 5.5(a). Assim, o número de funções da base \mathbf{F} é de $(2n_p + 1)$ para cada λ , sendo a dimensão da base (**Loops.dimP**) calculada com a equação,

Tabela 5.2: Estruturas de dados de **Loops** adicionadas

Loops (vectores)	Descrição
Loops.orderC	ordens das bases da solução complementar
Loops.orderP	ordens das bases da solução particular
Loops.dimC	dimensão do sistema complementar
Loops.dimP	dimensão do sistema particular
Loops.insertC	posição de entrada no sistema complementar
Loops.insertP	posição de entrada no sistema particular
Loops.gc	número de pontos de colocação de Gauss-Legendre para a integração numérica
Loops.lambda	os valores dos parâmetros λ
Loops.ohm	frequência generalizada obtida para cada elemento

$$\dim P = \dim(F) = 3(2n_p + 1) \quad (5.6)$$

Na interface (figura 5.5(a)) também se escolhe n_c , a ordem das funções de aproximação da solução complementar, e n_Γ , a ordem das funções de aproximação nas fronteiras, cujas dimensões (**Loops.dimC** e **Edges.dim**) das matrizes são calculadas nas equações (5.1) e (5.2), respectivamente. Com as funções **AssignPartsPart** e **AssignPartsCompl**, são calculados os vectores **dimC**, **insertC**, **dimP** e **insertP** e a variável que tem o valor da dimensão total do sistema a resolver (**Dim**) para o posterior mapeamento do sistema governativo (4.65).

O número de pontos de Gauss-Legendre utilizado no processo de colocação que conduz ao sistema (4.65) é calculado pela expressão,

$$gc = \text{ceil}(\sqrt{\dim(F)}) \quad (5.7)$$

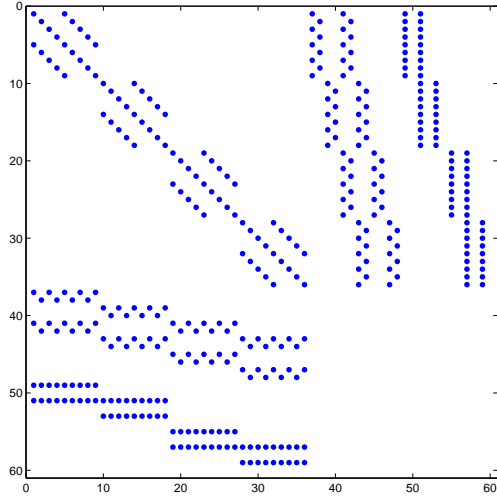
pelo que a quadratura de colocação vai ter um número de pontos igual ao do quadrado perfeito imediatamente superior à dimensão de F. O processo de colocação é necessário para obter a solução particular.

A escolha da ordem das funções de aproximação (figura 5.5(a)) afecta consideravelmente o comportamento da solução obtida. Nesta formulação tem-se bases de aproximação no domínio para a solução complementar recorrendo a funções de Bessel, na equação (4.7), para a solução particular tem-se base (4.45) e para as fronteiras foram escolhidas as funções de Chebyshev da equação (4.15).

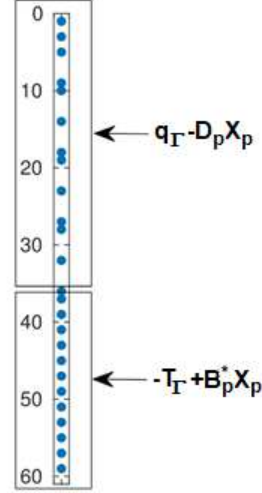
O mapeamento do sistema (4.65) é feito da mesma maneira apresentada na secção 5.2.2, como se pode observar na figura 5.6(a). De seguida, são realizados os cálculos dos campos iniciais de temperatura a partir dos dados colocados no campo "Inicial temperature" da interface (figura 5.5(a)), com as funções **ComputeCollocationInitialFields** para todos os pontos de Gauss para o processo colocação e **ComputeGaussInitialFields** para os pontos de Gauss para a integração no domínio.

5.3.2 Processamento

As matrizes \mathbf{D}_c e \mathbf{B}_c (calculadas pelas equações (4.56) e (4.52)), que não variam no tempo, são guardadas na matriz \mathbf{LHS} .



(a) Matriz dos coeficientes (**LHS**).



(b) Vector livre (**RHS**).

Figura 5.6: Mapeamento do sistema.

O sistema da solução particular é resolúvel para cada elemento e vai ter tantas linhas quantos pontos de colocação (gc^2) e tantas colunas quantas funções na base \mathbf{F} ($\dim P$). Para cada passo de tempo, o termo fonte é calculado e guardado no vector livre para o elemento corrente, conforme indicado no fluxograma 5.4. Depois de obter a solução particular \mathbf{X}_p , calcula-se e aloca-se os vectores \mathbf{q}_I , \mathbf{D}_p , \mathbf{T}_I e \mathbf{B}_p (calculadas pelas equações (4.51), (4.57), (4.62) e (4.61), respectivamente) e constrói-se o vector livre completo **RHS**.

É de notar que existem valores não nulos na região da figura 5.6(b), o vector livre **RHS** (\mathbf{X} do sistema (4.65)).

O método de resolução no caso do problema não homogéneo é idêntico ao descrito na secção 5.2.2. O cálculo dos integrais do sistema resolutivo é feito recorrendo a uma técnica de integração numérica baseada no método de Gauss-Legendre. O domínio de integração representa-se pela fronteira, ficando mapeada num intervalo $s \in [-1, 1]$. Para a função genérica $f(s)$ tem-se a equação (5.5).

5.3.3 Pós-processamento

No pós-processamento são calculados os valores das temperaturas e fluxos de calor nos pontos de Gauss para poder prosseguir para a construção dos gráficos dos campos obtidos nos passos de tempo desejados pelo utilizador (funções

ComputeGaussFields e PlotFields).

Com a solução do sistema (4.65) obtém-se uma única solução do campo de temperaturas e fluxos de calor, no domínio dos elementos e nas fronteiras. A solução do campo de temperaturas é obtida com base na aproximação (4.35) e para a aproximação do campo de fluxos de calor (4.46) recorre-se à lei de Fourier (2.7).

Este processo é realizado para cada passo de tempo. Os conjuntos destes resultados pode ser apresentado sob a forma animada, utilizando o ficheiro DAT que se guarda no final da resolução do problema para processamento noutros programas como o TecPlot.

É de notar que as funções mencionadas ao decorrer deste capítulo são descritas no anexo C.3.

Capítulo 6

Análise numérica do problema homogêneo

6.1 Introdução

O objectivo deste capítulo é analisar o desempenho numérico da formulação de elementos finitos-Trefftz apresentada no capítulo 4.1, quanto à convergência e à estabilidade da solução.

O problema a resolver é descrito pela equação (4.1), complementada por condições de fronteira do tipo Dirichlet (3.10).

A análise da convergência da solução numérica é feita através da quantificação do erro relativo médio no domínio. A análise da estabilidade da solução é feita com o estudo da sua degradação com a distorção da malha. Para permitir uma avaliação objectiva da qualidade numérica, usa-se um problema com solução analítica conhecida. A solução analítica não pertence à base de aproximação dos elementos finitos, de modo a impedir a convergência artificial que se obteria caso fosse incluída.

6.2 Testes de convergência para a solução analítica

6.2.1 Solução analítica

De modo a obter uma solução que não pertença à base de aproximação, optou-se por resolver a equação governativa (4.1) num referencial cartesiano. As condições de fronteira a impôr resultam da projecção dessas soluções nas fronteiras do domínio.

Admitindo que a equação (4.1) admite soluções do tipo,

$$T(x, y) = e^{i\omega(\xi x + \eta y)} \quad (6.1)$$

onde ξ e η são parâmetros a determinar, e substituindo na equação (4.1) resulta,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{i\omega(\xi x + \eta y)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{i\omega(\xi x + \eta y)} + \omega^2 e^{i\omega(\xi x + \eta y)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\omega^2 \xi^2 - \omega^2 \eta^2 + \omega^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega^2(-\xi^2 - \eta^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \quad (6.2)$$

Deste modo, qualquer função do tipo (6.1), sujeita à condição (6.2), é solução da equação (4.1) e não está incluída na base de aproximação (4.7). Neste trabalho, para garantir a invariabilidade da solução analítica à rotação dos eixos, optou-se por escolher $\xi = \eta = 1/\sqrt{2}$. Com isto, a solução analítica fica,

$$T(x, y) = e^{i\omega \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)} \quad (6.3)$$

Como a frequência generalizada ω da equação (3.7) é puramente imaginária, a solução analítica (6.3) é exponencial, tendo o valor máximo, $T=1$, na origem do referencial, e diminuindo à medida que se afasta do mesmo. A taxa de diminuição da solução é controlada pela escolha do valor da frequência, sendo maior para módulos grandes da mesma.

Na figura 6.1 encontram-se ilustrados os campos da solução (6.3) no domínio quadrado de lado unitário com a origem do referencial num dos cantos, para os valores da frequência generalizada $\omega = i$ e $\omega = 10i$, utilizados nesta secção do trabalho.

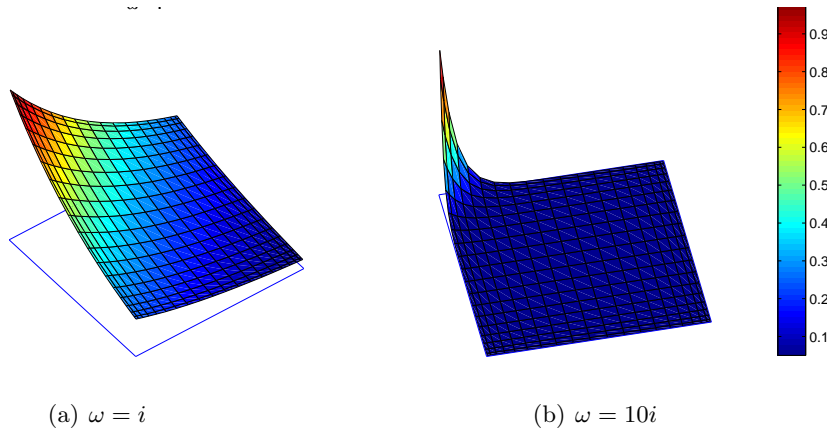


Figura 6.1: Representação gráfica da solução analítica 6.3, com diferentes frequências generalizadas ω .

6.2.2 Modelo de teste

O modelo de teste escolhido envolve um domínio quadrado de lado unitário, de condutividade térmica (k) unitária.

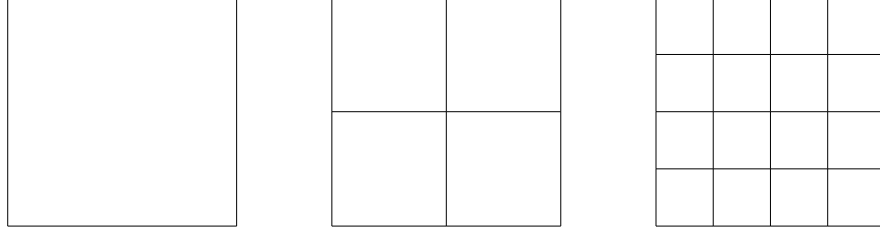


Figura 6.2: Refinamento h - malhas utilizadas no modelo de teste

A figura 6.2 mostra as malhas utilizadas para resolver o problema descrito, com 1, 4 e 16 elementos finitos, de iguais dimensões. As quatro bases de aproximação utilizadas para cada nível de refinamento h têm ordens constantes em todos os elementos (n_D) e fronteiras (n_Γ). Estas ordens são listadas na tabela 6.1. Todas as fronteiras exteriores são definidas como fronteiras de Dirichlet. As temperaturas aplicadas são iguais às projecções nas fronteiras do campo (6.3)

Os refinamentos correspondem a números totais de graus de liberdade que variam entre 17, para o caso menos refinado (1 elemento, com $n_D = 4$ e $n_\Gamma = 1$) e 696 para o caso mais refinado (16 elementos, com $n_D = 15$ e $n_\Gamma = 4$).

Tabela 6.1: Refinamento p - ordens das bases de aproximação utilizadas

n_D	n_Γ
4	1
7	2
11	3
15	4

6.2.3 Erro relativo

A comparação da solução analítica com a solução obtida pelos elementos finitos híbridos-Trefftz é feita através do erro relativo médio (ε_r) dos campos de temperatura. Este erro é definido pela equação,

$$\varepsilon_r = \frac{\int_{\Omega} |T_{ex} - T_{aprox}| d\Omega}{\int_{\Omega} |T_{ex}| d\Omega} \quad (6.4)$$

onde a solução exacta T_{ex} do campo de temperaturas obtém-se pela equação (6.3). O valor do campo de temperaturas aproximado T_{aprox} é obtido pelo modelo

numérico, e $|T_{ex}|$ representa o valor absoluto do campo T_{ex} .

Utilizou-se uma quadratura de tipo Gauss-Legendre, com 20 pontos em cada direcção cartesiana.

Os erros (6.4) calculados para as 12 combinações de refinamento p e h são apresentados B.1 do anexo B.

6.2.4 Análise de resultados

Os campos das temperaturas recuperados pelos modelos menos e mais refinado são apresentados nas figuras 6.3 e 6.4, respectivamente.

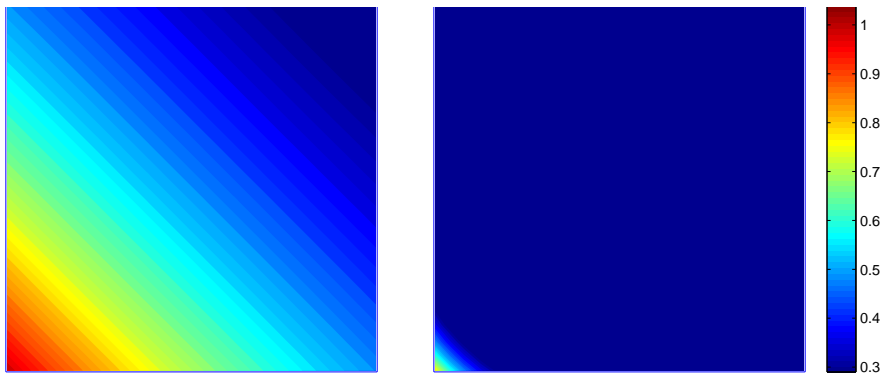


Figura 6.3: Campos de temperaturas aproximados para os refinamentos: 1 elemento, $n_D = 4$, e $n_\Gamma = 1$.

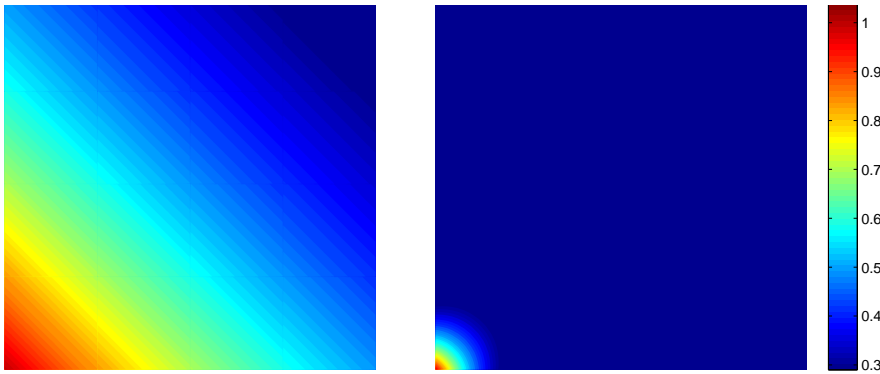


Figura 6.4: Campos de temperaturas aproximados para os refinamentos: 16 elemento, $n_D = 15$, e $n_\Gamma = 4$; com ω igual a i e $10i$ respectivamente.

Conforme se pode observar na figura 6.3, os valores obtidos com o refinamento mais baixo aqui utilizado, são muito semelhantes aos valores exactos da figura 6.1, com

erros relativos de $4,96\text{E-}04$ para $\omega = i$ e $5,18\text{E-}01$ para $\omega = 10i$ (ver tabela B.1). Para o maior refinamento (figura 6.4), os erros são menores, chegando a $2,03\text{E-}10$ e $7,37\text{E-}05$, respectivamente para $\omega = i$ e $\omega = 10i$.

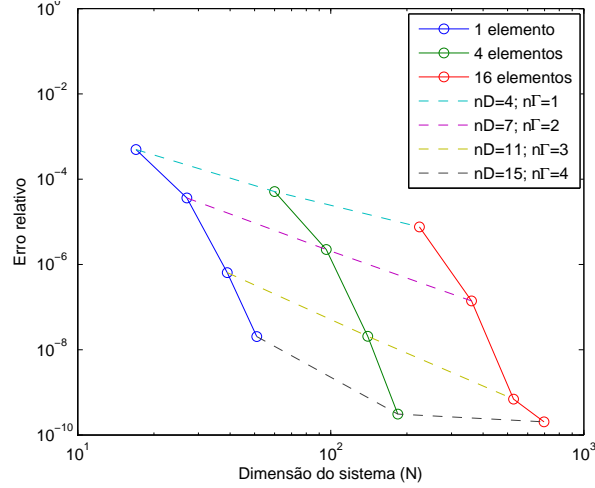
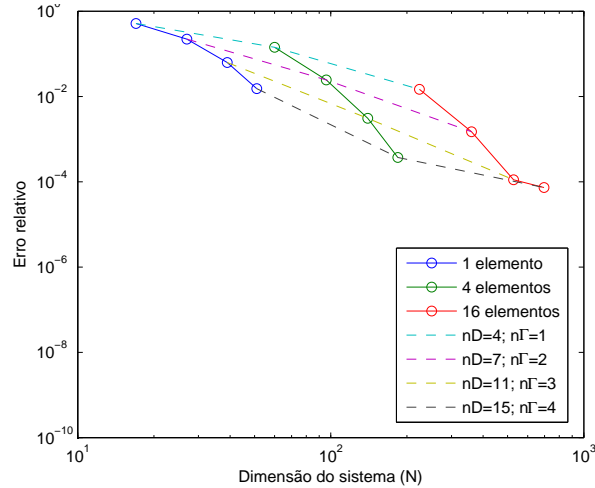
(a) $\omega = i$ (b) $\omega = 10i$

Figura 6.5: Variação do erro relativo em função da dimensão do sistema.

Claramente, a presença de mais funções na base de aproximação potencia a capacidade do modelo de recuperar os altos gradientes de temperatura presentes na vizinhança da origem na solução analítica (figura 6.1).

As normas do erro obtidas para todos os refinamentos utilizados estão representadas graficamente nas figuras 6.5. Os valores dos erros estão representados no eixo das ordenadas em função do número total dos graus de liberdade (N), definido como sendo a dimensão total do sistema resolutivo (4.32). Ambos os eixos estão em escala logarítmica.

Nas figuras 6.5, as linhas sólidas representam a convergência sob refinamentos h mantendo constantes as ordens de aproximação, e as linhas a tracejado representam a convergência sob refinamentos p , mantendo inalterada a malha de elementos finitos.

Deste modo, e tal como foi observado na tabela B.1, as figuras 6.5 indicam que todos os refinamentos são convergentes. Isto é, os erros baixam com o aumento do número de elementos na malha e também com o aumento das ordens das bases de aproximação no domínio e nas fronteiras.

Um indicador útil da celeridade da convergência é a taxa de convergência. Esta taxa é definida geometricamente pela inclinação das linhas das figuras 6.5. A definição matemática da taxa de convergência (μ) é dada por,

$$\log(\varepsilon_r) \sim -\mu \cdot \log(N)$$

$$\varepsilon_r \sim N^{-\mu} \quad (6.5)$$

Para exemplificar a utilização prática da taxa de convergência, considere-se num processo de refinamento, em que o número de graus de liberdade é duplicado, de N_1 para $N_2 = 2N_1$. O rácio dos erros entre os dois casos fica então,

$$\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^{-\mu} = 2^{-\mu} \quad (6.6)$$

Assim, existe uma redução da ordem de $2^{-\mu}$ quando se duplica o número de graus de liberdade. Este exemplo é directamente generalizável, concluindo-se que aumentando l vezes o número de graus de liberdade pode-se esperar uma redução do erro da ordem,

$$O = l^{-\mu} \quad (6.7)$$

De notar, no entanto, que conforme ilustrado nas figuras 6.5, a taxa de convergência não é constante, mas varia com o nível de refinamento. Por isso, a taxa de convergência deve ser encarada como uma medida qualitativa, mais do que quantitativa.

As taxas de convergência para os refinamentos testados estão listadas na tabela 6.2.

Tabela 6.2: Resultados da taxa de convergência para os refinamentos p e h .

	1	4	16	$n_D = 4$	$n_D = 7$	$n_D = 11$	$n_D = 15$
ω	elemento	elementos	elementos	$n_\Gamma = 1$	$n_\Gamma = 2$	$n_\Gamma = 3$	$n_\Gamma = 4$
i	-5,66	-6,66	-8,41	-1,80	-2,19	-2,69	-3,26
$10i$	-1,83	-3,74	-4,82	-1,02	-1,74	-2,35	-2,90

Pode-se verificar que as taxas de convergência são muito maiores para refinamentos

p do que h. Os valores dos erros relativos para frequências baixas (figura 6.5(a)) são inferiores aos erros relativos com frequências elevadas (figura 6.5(b)) por causa do menor gradiente da solução e a taxa de convergência é tanto menor quanto maior for o módulo da frequência ω .

As melhores soluções correspondem a refinamentos simultâneos do número de elementos (h) e das bases de aproximação (p).

6.3 Sensibilidade à distorção de malha

O estudo da sensibilidade à distorção de malha das soluções obtidas utilizando os elementos finitos híbridos-Trefftz é motivado pela notória deterioração da qualidade da solução obtida com elementos finitos convencionais, quando o rácio entre os lados maior e menor do elemento finito ultrapassa um determinado valor limite (2 a 3 são valores tipicamente aceites).

A importância da quantificação deste erro deve-se à frequência com a qual malhas distorcidas aparecem na prática, principalmente em problemas envolvendo estruturas não regulares. No entanto, tendo em conta que os elementos finitos híbridos-Trefftz apenas envolvem integração nas fronteiras, a distorção da forma do elemento é passível de ter menos influência na qualidade da solução do que no caso dos elementos finitos convencionais.

Para testar a sensibilidade da solução à distorção da malha, o problema definido na secção 6.2.4 é resolvido utilizando a malha de elementos triangulares representada na figura 6.6. A distorção é induzida no problema, variando o coeficiente de distorção η de 1, correspondente à malha sem distorção, até 10^{-10} . Foram testados 10 valores para η , cada um 10 vezes menor que o anterior. Optou-se por valores da frequência generalizada de $\omega^2 = -1, -2, -3, -4$.

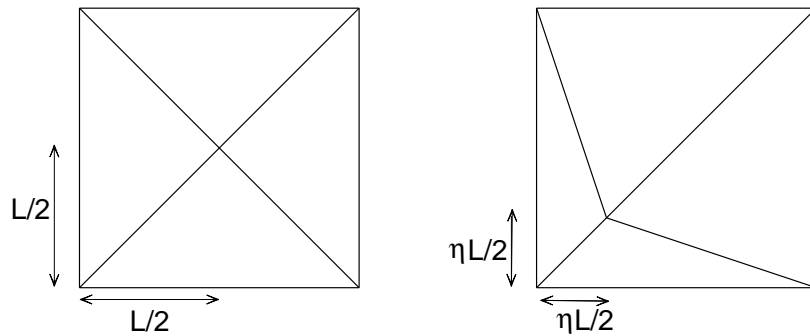


Figura 6.6: Modelo de teste de distorção

Tendo em conta que a solução analítica tem um maior gradiente no canto inferior esquerdo do modelo, a distorção da malha é direccionada para esse ponto (figura 6.6).

Para o cálculo do erro de distorção recorreu-se à expressão,

$$\varepsilon_d = \left| 1 - \frac{\int_{\Omega} T_{\eta} d\Omega}{\int_{\Omega} T_{ini} d\Omega} \right| \quad (6.8)$$

onde T_{η} é o campo de temperaturas obtido com a malha distorcida e T_{ini} é o mesmo campo obtido com a malha não distorcida.

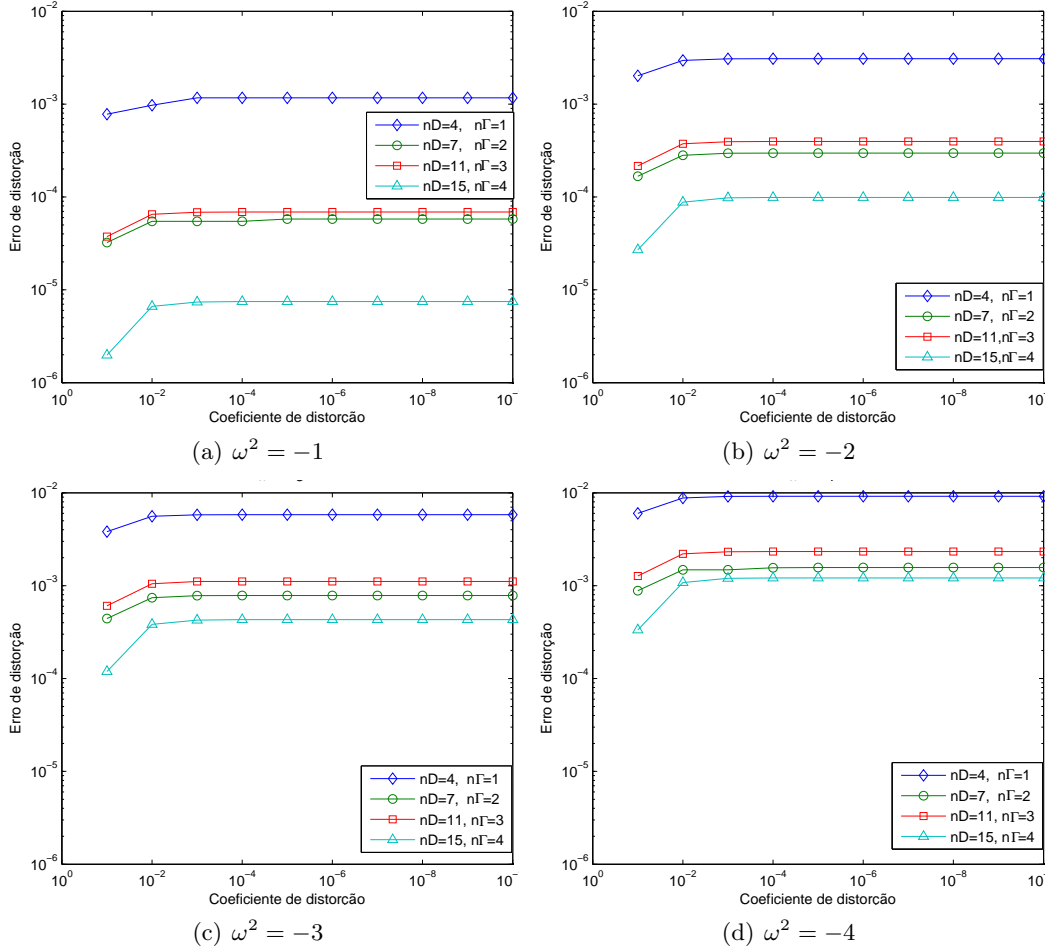


Figura 6.7: Resultados do erro (ε_d) para diferentes coeficientes de distorção, com diferentes frequências ω .

Na figura 6.7 apresenta-se os gráficos da variação do erro de distorção ε_d para as frequências testadas, em função do parâmetro de distorção η . Os dois eixos estão em escala logarítmica.

Os erros de distorção são listados nas tabelas B.2 a B.5 no anexo B. Os erros provocados pela distorção de malha são desprezáveis, ao contrário do que acontece com os elementos finitos convencionais. Os erros para frequências mais baixas são sempre inferiores aos erros para frequências mais altas, o que acontece

também para os erros de convergência calculados anteriormente.

Capítulo 7

Análise numérica do problema não-homogéneo

7.1 Introdução

O primeiro objectivo deste capítulo é analisar o desempenho numérico da formulação de elementos finitos híbridos-Trefftz para o problema não homogéneo definido pela equação (3.9), quanto à convergência da solução aproximada e à sua estabilidade à distorção de malha. Para ambas as análises, é utilizada uma solução analítica que não pertence às bases de aproximação, seguindo um procedimento análogo ao do capítulo anterior.

O segundo objectivo do capítulo é aplicar a formulação híbrida-Trefftz a um problema de maior grau de complexidade, no qual é analisada a resposta de um perfil metálico IPE a um incêndio.

7.2 Testes de convergência

À semelhança dos testes de convergência apresentados na secção 6.2, a análise apresentada de seguida tem como objectivo averiguar o impacto dos vários tipos de refinamentos na qualidade da solução. Para além dos refinamentos do tipo h e p, já investigados no âmbito da análise do problema homogéneo, no problema transitório torna-se relevante o refinamento do passo de tempo.

7.2.1 Solução analítica

Para todos os testes de convergência utilizou-se a solução analítica com uma variação no tempo oscilatória polinomial e uma variação espacial sinusoidal, dada por,

$$T(x, y, t) = T_t(t) \cdot T_t(x, y) = (8 - 80t + 180t^2 - 140t^3 + 35t^4) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (7.1)$$

Na figura 7.1 apresenta-se a componente da solução dependente do tempo $T_t(t)$ no intervalo de 0 a 2 segundos.

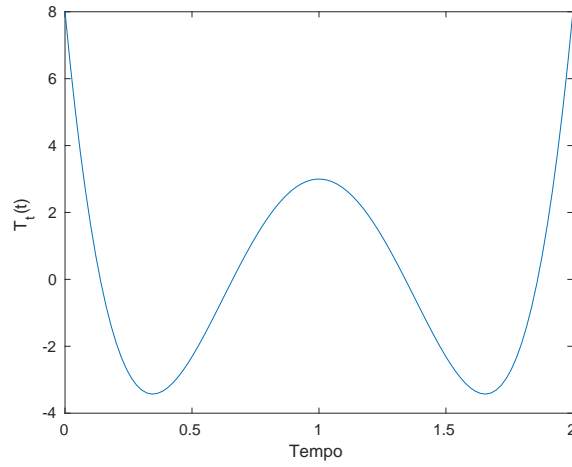


Figura 7.1: Variação da temperatura com o tempo

O calor interno é dependente do tempo e obtido através da equação de Navier (3.9),

$$Q = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla^2 T \quad (7.2)$$

resultando a seguinte expressão analítica,

$$Q(x, y, t) = [1 - 10,8t + 25t^2 - 19,8t^3 + 5t^4] \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (7.3)$$

As condições iniciais do problema são obtidas substituindo $t = 0$ na equação (7.1) e na sua derivada,

$$T_0(x, y) = 8 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (7.4)$$

$$\dot{T}_0(x, y) = -80 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \quad (7.5)$$

A solução analítica dada pela expressão (7.1) é representada na figura 7.2, no instante $t = 2,0$ s.

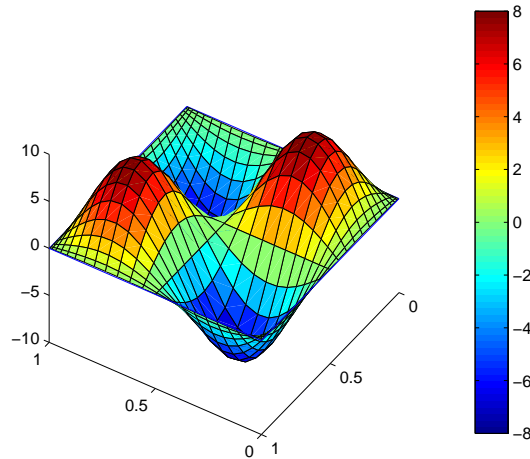


Figura 7.2: Campo de temperaturas exacto

7.2.2 Modelo de teste

O modelo de teste é constituído por um domínio quadrado de lado unitário, feito de um material com densidade (ρ), condutividade térmica (k) e calor específico (c) unitários. O problema descrito na secção anterior foi definido através da aplicação de condições de fronteiras do tipo Dirichlet em todas as fronteiras exteriores do modelo. Os valores das temperaturas a aplicar foram obtidos através da projecção do campo (7.1) nas mesmas fronteiras e são não nulos em todo o contorno.

Os refinamentos h foram realizados utilizando malhas de 1, 4, 9 e 16 elementos finitos quadrados, idênticos aos representados na figura 6.2. No que toca aos refinamentos p , foram testados 4 níveis de refinamento, com ordens das bases de aproximação no domínio (n_c e n_p), e graus das bases de aproximação nas fronteiras (n_Γ), que se encontram na tabela 7.1.

Também é estudada a convergência dos resultados em relação ao passo de tempo. Para tal, o intervalo total da análise (2 segundos) foi discretizado em 5, 8, 10 e 20 passos de tempo, resultando nas durações Δt de cada passo dadas na última linha da tabela 7.1.

Tabela 7.1: Refinamentos utilizados para a análise do problema não homogêneo

Tipo de refinamentos	Modelo de teste menos refinado	-	-	Modelo de teste mais refinado
	$n_c = 4$	$n_c = 5$	$n_c = 6$	$n_c = 9$
Refinamento p	$n_p = 1$	$n_p = 2$	$n_p = 3$	$n_p = 6$
(ordens)	$n_\Gamma = 1$	$n_\Gamma = 2$	$n_\Gamma = 3$	$n_\Gamma = 5$
Refinamento h	1	4	9	16
(elementos)				
Δt (s)	0,4	0,25	0,2	0,1

Para cada caso de refinamento no tempo, a frequência generalizada ω toma valores diferentes, sendo maior quanto menor o Δt . Os valores de ω encontram-se na tabela 7.2.

Tabela 7.2: Frequência generalizada (ω) para cada passo de tempo

Δt (s)	Frequência generalizada (ω)
0,4	$2,24i$
0,25	$2,83i$
0,2	$3,16i$
0,1	$4,47i$

Na figura 7.3 estão representados os campos de temperaturas e dos fluxos de calor no fim do intervalo analisado ($t = 2s$), obtidos utilizando o modelo mais refinado da tabela 7.1. Como se pode observar, a solução analítica apresentada na figura 7.2 é bem recuperada, bem como as condições de fronteira, em que as temperaturas são nulas em todas as fronteiras exteriores. A ligação entre elementos é suave em todos os campos obtidos, apesar de não ter sido imposta a continuidade de fluxos de calor na formulação.

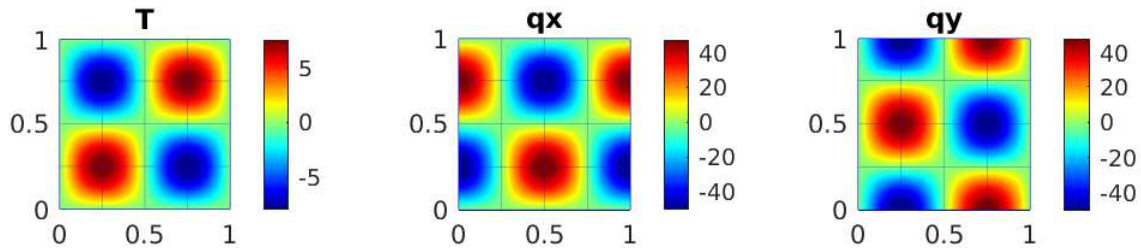


Figura 7.3: Campos de temperatura (T) e fluxos de calor em x e y (q_x e q_y) para o modelo de teste mais refinado

7.2.3 Erro relativo

O erro relativo definido pela equação (6.4) foi calculado no fim do intervalo total de 2 segundos.

Os resultados detalhados para todos os casos analisados encontram-se apresentados na tabela B.7 do anexo B. Verifica-se que à medida que se aumenta o número de elementos, as ordens das bases de aproximação e o número de passos de tempo, diminui o erro relativo. Estes valores foram utilizados para a obtenção da taxa de convergência, na secção seguinte.

7.2.4 Análise de convergência dos resultados

De modo a analisar a convergência dos resultados obtidos para o problema não homogêneo, é estudada a taxa de convergência tal como foi definida na secção 6.2.3, para problemas homogêneos. No entanto, no caso não homogêneo, o erro relativo é comparado com o esforço computacional, em vez da dimensão do sistema resolutivo usada nos gráficos da figura 6.5 do problema homogêneo. O esforço computacional é avaliado pelo tempo total da análise do problema, cuja medição é feita após a repetição da corrida até à sua estabilização.

Os gráficos da convergência representam a variação do logaritmo do erro relativo (6.4) com o logaritmo do esforço computacional obtida para os vários níveis de refinamento p , h e t e estão representados na figura 7.4. Na tabela B.8 do anexo B tem-se os valores dos tempos computacionais registados para análises efectuadas. Os testes foram realizados com um computador de 64 bits, com Intel Core i7, 2,2GHz e 8GB de memória RAM.

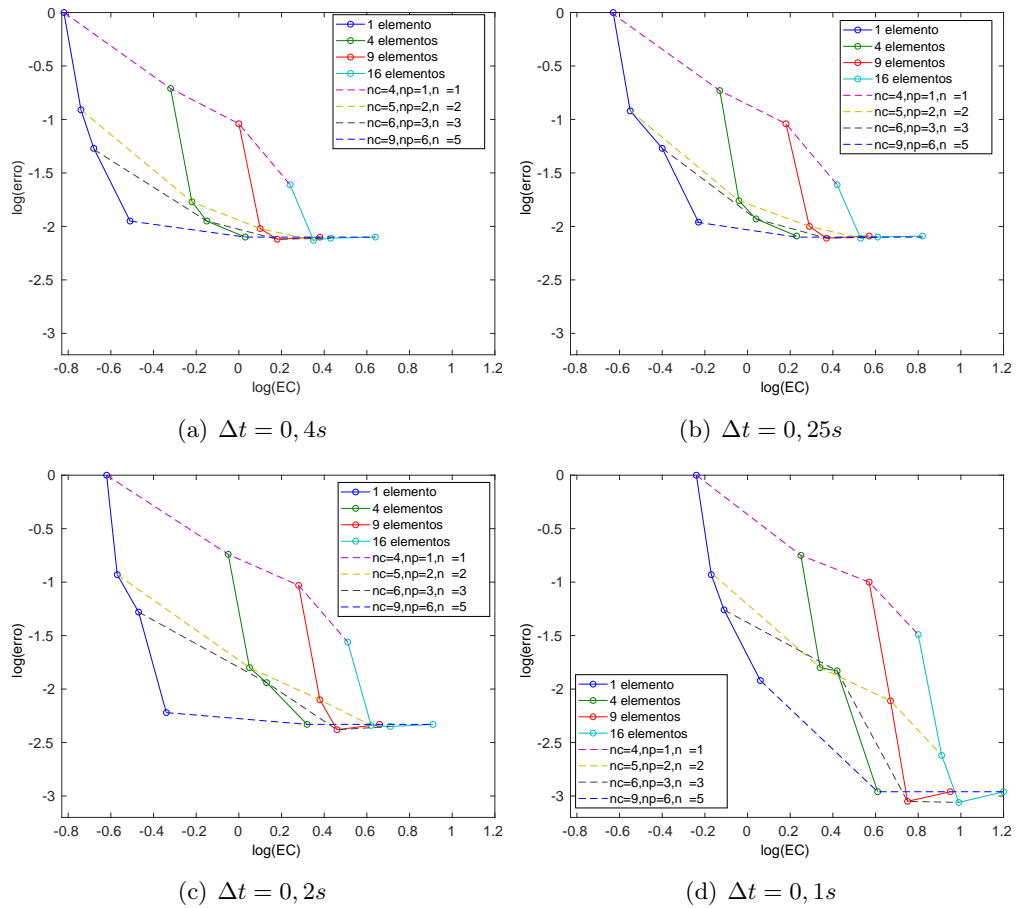


Figura 7.4: Variação do logaritmo do erro (ε_r) em função do logaritmo do esforço computacional (EC) para diferentes passos de tempo.

A taxa de convergência é definida aqui como sendo o declive inicial do respectivo

gráfico. Este declive indica a celeridade da convergência da solução para os refinamentos referidos.

Na figura 7.4, pode-se observar que o erro relativo diminui em geral, com todos os refinamentos, enquanto o esforço computacional aumenta. Os refinamentos p resultam em diminuições dos erros mais rápidas do que as que correspondem aos refinamentos h. No entanto, para cada caso testado, existe um nível limite da qualidade que se pode obter aumentando os refinamentos p e h. Este nível depende do refinamento no tempo utilizado sendo as soluções tanto mais precisas quanto menor for o passo de tempo. O erro relativo mínimo corresponde aos modelos mais refinados, na figura 7.4(d) e é inferior a 0,1%.

Tabela 7.3: Resultados da taxa de convergência para os refinamentos p, h e Δt .

Δt (s)	Refinamento h				Refinamento p			
	1	4	9	16	$n_c = 4$	$n_c = 5$	$n_c = 6$	$n_c = 9$
					$n_p = 1$	$n_p = 2$	$n_p = 3$	$n_p = 6$
					$n_\Gamma = 1$	$n_\Gamma = 2$	$n_\Gamma = 3$	$n_\Gamma = 5$
0,40	-11,51	-10,99	-9,39	-4,71	-1,41	-0,20	-1,28	-0,26
0,25	-10,79	-10,87	-9,21	-4,55	-1,45	-0,20	-1,52	-0,28
0,20	-18,13	-10,72	-10,56	-7,08	-1,29	-1,41	-1,07	-0,16
0,10	-12,16	-10,87	-10,97	-10,57	-1,53	-1,71	-1,07	-1,89

Os valores das taxas de convergência para cada gráfico da convergência encontram-se na tabela 7.3. Observa-se que à medida que o refinamento h aumenta, a taxa de convergência diminui. Também se observa uma diminuição da taxa de convergência quando se aumenta o refinamento p.

Na tabela 7.3, é possível observar que o passo de tempo não influencia a taxa de convergência, embora influencie bastante o erro mínimo alcançável, conforme referido acima.

7.3 Sensibilidade à distorção da malha

O estudo da sensibilidade à distorção da malha tem como objectivo averiguar o efeito que a distorção da malha de elementos finitos tem na qualidade das soluções obtidas. É realizado o mesmo procedimento da secção 6.3, utilizando a malha não distorcida de 4 elementos representada na figura 6.6 e coeficientes de distorção η que variam entre 1,0 e 0,04.

O problema analítico utilizado para averiguar o efeito da distorção de malha é o descrito na secção 7.2.1, aplicado a um domínio quadrado de lado 0,5 através da imposição de temperaturas nas fronteiras exteriores de Dirichlet. Todas as características do material (densidade, condutividade e calor específico) são unitárias. A solução analítica do problema está representada na figura 7.5.

Recorda-se que o erro de distorção (6.8) reflete o desvio da solução obtida na malha distorcida face à obtida na malha não distorcida. Por isso, o erro de distorção não dá informações sobre o erro da solução numérica face à solução analítica, como acontecia com os erros calculados na secção 7.2.

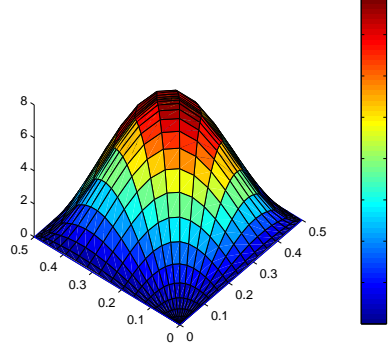


Figura 7.5: Solução analítica (7.1) para a análise do erro de distorção

Foram utilizados 25 valores do coeficiente de distorção η , definido na figura 6.6, que tomou valores de 1 a 0,04, correspondendo a um comprimento L_d não distorcido de 0,25 e distorcido a variar de 0,24 a 0,01.

A variação do erro de distorção definido pela expressão (6.8) e calculado no final da furação total da análise (2,0 s), em função do comprimento L_d para as ordens das bases de aproximação ($n_c = 6, n_p = 3, n_\Gamma = 3$) e passos de tempo Δt de 0,5 s, 0,1 s e 0,05 s, é apresentada na figura 7.6.

De acordo com a figura 7.6, pode-se observar que os valores do erro de distorção são baixos para a malha menos distorcida e tendem a aumentar para malhas distorcidas, sobretudo para passos de tempo mais reduzidos, como Δt de 0,1 s e 0,05 s. O aumento da distorção provoca grandes alterações na solução nestes casos, provavelmente por causa dos valores mais altos das frequências generalizadas ω obtidas para passos de tempo menores.

Observa-se ainda que a sensibilidade à distorção de malha é muito superior à obtida para problemas homogénea (secção 6.3) e às comunicadas noutros estudos (e.g. [20]). Claramente, essa sensibilidade deve-se ao processo que conduz à obtenção da solução particular, envolvendo a colocação no domínio dos elementos. Apesar de não haver necessidade de integração no domínio, os sistemas resolutivos do tipo (4.65) resultantes do processo de colocação são sensíveis a pontos quase coincidentes, ficando mal condicionados, o que conduz ao aumento de erros.

Na figura 7.7 apresenta-se a variação do erro da distorção para o passo de tempo $\Delta t = 0,5$ s e variando as ordens das bases de aproximação. As ordens testadas são as mesmas utilizadas na secção anterior, nomeadamente ($n_c = 5, n_p = 2, n_\Gamma = 2$), ($n_c = 6, n_p = 3, n_\Gamma = 3$) e ($n_c = 9, n_p = 6, n_\Gamma = 5$).

Novamente, observa-se um aumento gradual do erro à medida que se distorce a malha para todos os refinamentos, mas sobretudo para o caso mais refinado. Neste caso, a perda da qualidade da solução é justificada pela natureza mais oscilatória das funções de aproximação da solução particular de ordem alta.

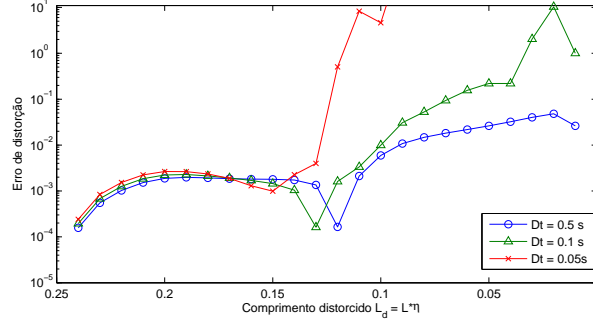


Figura 7.6: Erro de distorção para diferentes passos de tempo, graus de aproximação ($n_c = 6, n_p = 3, n_\Gamma = 3$) e malha de 4 elementos triangulares

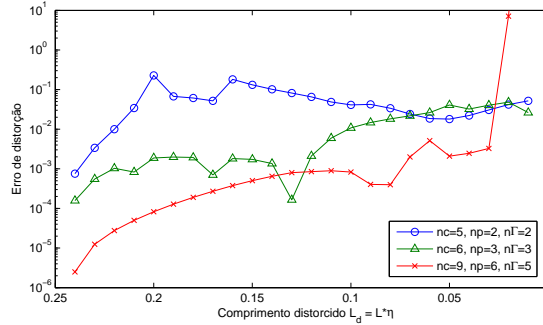


Figura 7.7: Erro de distorção para diferentes ordens das bases de aproximação, $\Delta t = 0,5$ s e malha de 4 elementos triangulares

7.4 Análise de um caso de estudo mais complexo

Depois de avaliar a convergência e estabilidade das soluções do problema não homogêneo, é estudado um caso de maior complexidade. A situação analisada envolve o aquecimento do banzo inferior de um perfil metálico IPE300, com isolamento térmico adjacente à alma, devido a um incêndio. O estudo do caso estacionário deste problema é apresentado na referência [2].

Na figura 7.8(a) é apresentada a descrição do problema, incluindo as condições de fronteiras aplicada para modelar a situação representada na figura 7.8(b). As

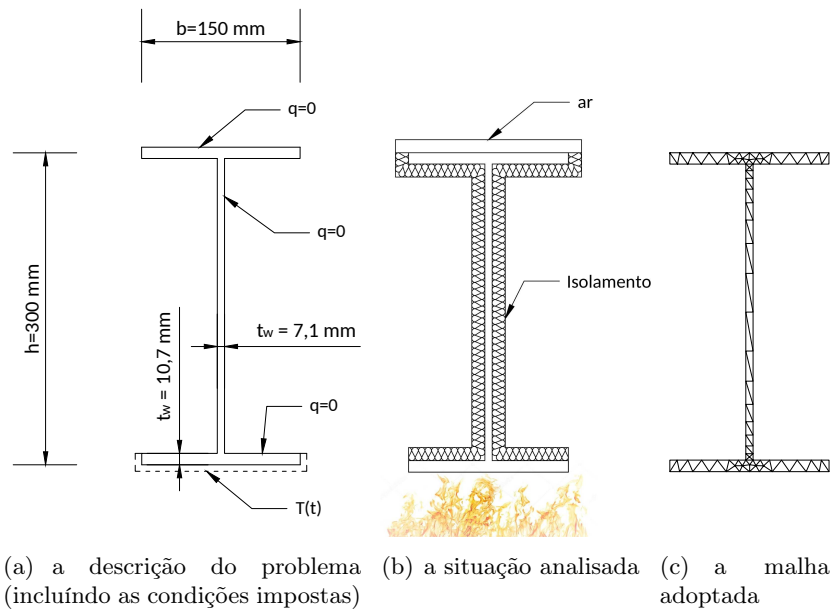


Figura 7.8: Definição do problema e malha de elementos finitos

condições iniciais correspondem a uma temperatura constante e estável de 32,5 °C.

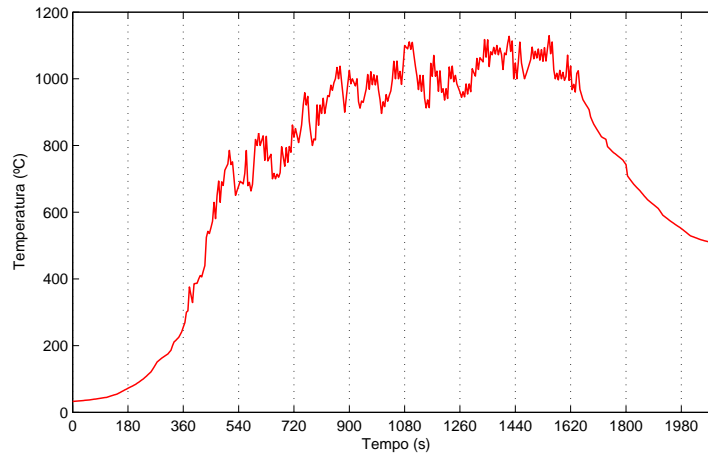


Figura 7.9: Valores de temperaturas ao longo do tempo, gráfico adaptado de [1].

As características do material são a condutibilidade térmica do aço de valor $k = 40$ $[W/(m^{\circ}C)]$, a densidade do aço $\rho = 7860$ $[kg/m^3]$ e o calor específico $c = 490$ $[J/(kg \cdot ^{\circ}C)]$, considerando que o material tem comportamento fisicamente linear. A difusividade térmica α é obtida pela expressão (3.6), resultando no valor de 103858,3 $[m^2/s]$.

Os valores de temperatura ao longo do tempo que são aplicados ao banzo inferior (figura 7.9) foram obtidos por um estudo do dimensionamento de túneis em relação à segurança perante um fogo [1]. Os valores da temperatura foram medidos no gráfico, de 5 em 5 segundos.

7.4.1 Descrição do modelo

A malha adoptada é ilustrada na figura 7.8(c) e tem 110 elementos triangulares, com maior refinamento h nas reentrâncias, onde se esperam maiores concentrações de fluxos de calor. Para cada elemento, o refinamento p adoptado é $n_c = 9, n_p = 6, n_\Gamma = 5$. O número total de graus de liberdade para a solução complementar é de 2090, e para a solução particular é de 4290 e para as fronteiras é de 660. Foram utilizados dez pontos de Gauss por fronteira para calcular os integrais que definem os blocos do sistema resolutivo.

O tempo total da análise é de 2100 segundos. A discretização no tempo é feita utilizando passos de $\Delta t = 5$ s, resultando num total de 420 passos de tempo.

7.4.2 Resultados

A figura 7.10 ilustra o campo das temperaturas que ocorre no banzo inferior após os primeiros 5 segundos. Nesta imagem encontra-se um bom exemplo da capacidade dos elementos finitos híbridos-Trefftz de se adaptarem a gradientes muito elevados dos campos modelados.

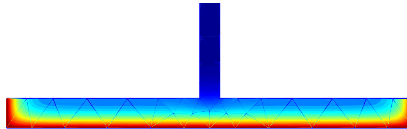


Figura 7.10: Campo de temperaturas no banzo inferior após 5 segundos

Os resultados apresentados na figura 7.11 foram obtidos adoptando o passo de tempo de 5 segundos para a análise. Assim os campos das soluções obtidas nas figuras 7.11 de a) até m) correspondem a intervalos de 3 de 3 minutos. Estes instantes são indicados pelas linhas verticais na figura 7.9.

É de salientar que o resultado apresentado na figura 7.11 é apenas um conjunto de soluções obtidas com o passo de tempo de 0,5 segundos, sendo 420 passos de tempo, tem-se 419 campos de temperatura obtidos dos quais escolheu-se apenas 11 para ilustrar as soluções obtidas. Pode-se observar que se conseguiu obter uma solução sem instabilidade numérica, apesar de que, com um passo de tempo tão curto, o valor da frequência generalizada é muito elevado.

A avaliação da figura 7.11 é realizada a nível visual e, uma vez que não existe nenhuma discrepância nos campos de temperaturas obtidos, a suavidade observada entre elementos é um bom indicador que a solução obtida é próxima da realidade

da situação modelada. A variação espacial da temperatura no perfil é ascendente ao longo do tempo, até estabilizar e reduzir quando o incêndio é apagado, que segundo a figura 7.9 acontece a partir do instante de tempo $t = 27$ minutos (figura 7.11(i)). Para o instante $t = 33$ minutos (figura 7.11(k)), a velocidade de arrefecimento no interior do perfil é menor que no bordo inferior do banzo, onde são impostas as temperaturas da figura 7.9. Além destes factores, os valores observados nas fronteiras revelam que a solução recupera bem as condições cinemáticas impostas nas fronteiras de Dirichlet e as condições estáticas nas fronteiras de Neumann, ao longo da análise.

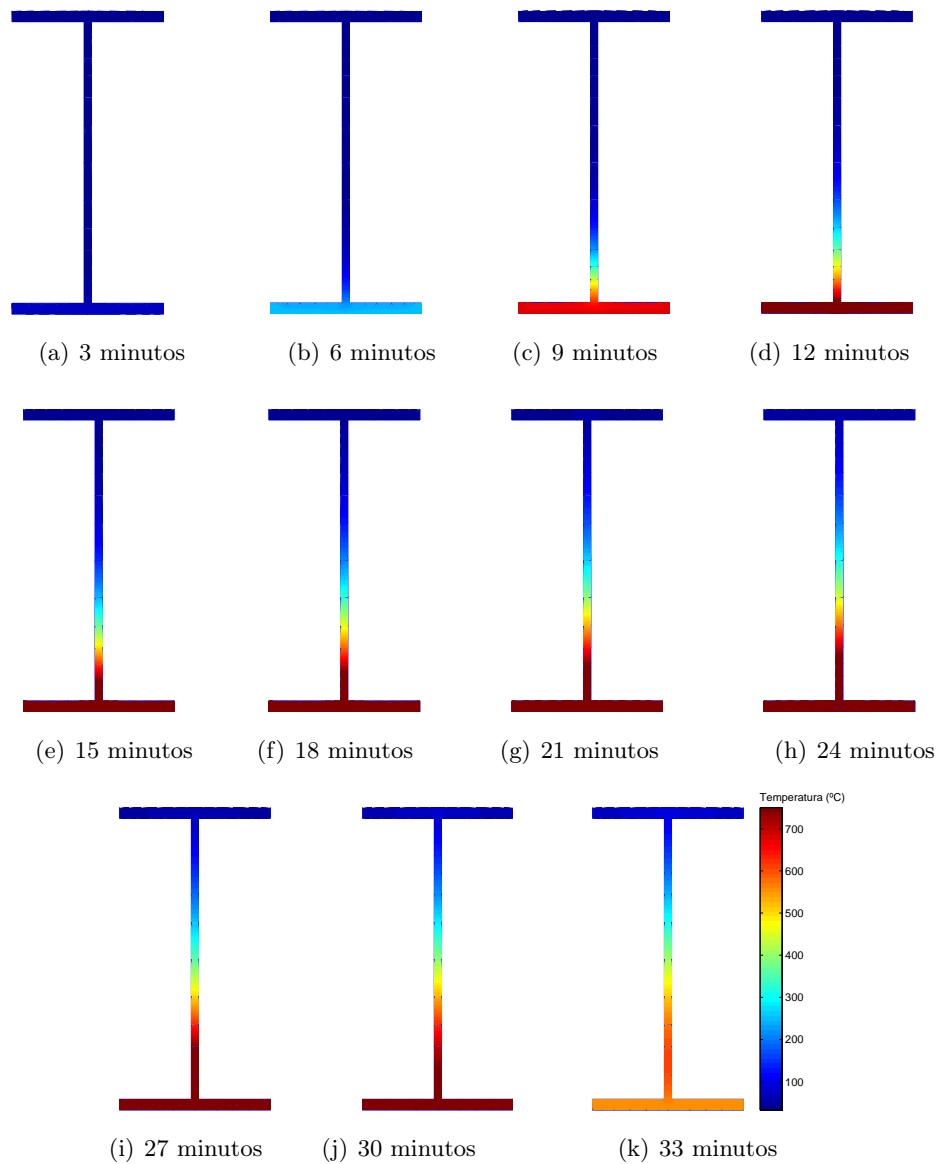


Figura 7.11: Soluções do campo de temperaturas de 3 em 3 minutos

Apresenta-se na figura 7.12 os resultados correspondentes aos fluxos normais de

calor da situação da figura 7.11(f), no instante correspondente a 18 minutos, um dos picos do gráfico 7.9. A temperatura só varia na direcção y porque é considerado um isolamento térmico perfeito na alma, assim demonstra-se que o fluxo de calor na direcção x é nulo em praticamente todo o perfil. Os pontos onde o fluxo em x não é nulo correspondem a alterações repentinas da geometria da secção. Já o campo dos fluxos de calor na direcção y atinge valores significativos, pelo que contém uma concentração de fluxos de calor no banzo inferior, entre a fonte de calor e a alma.

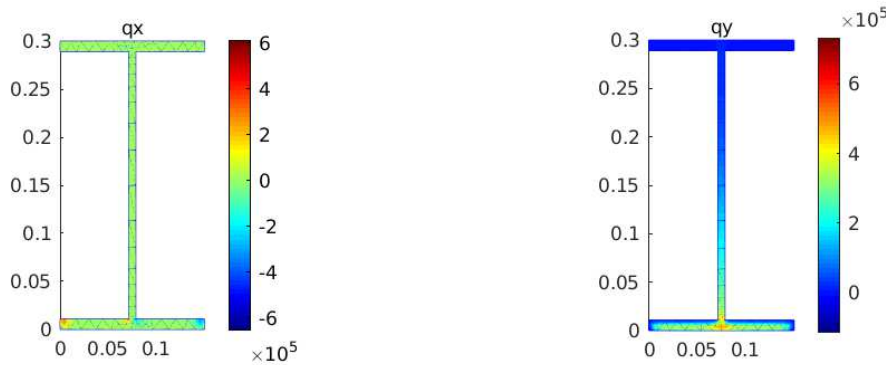
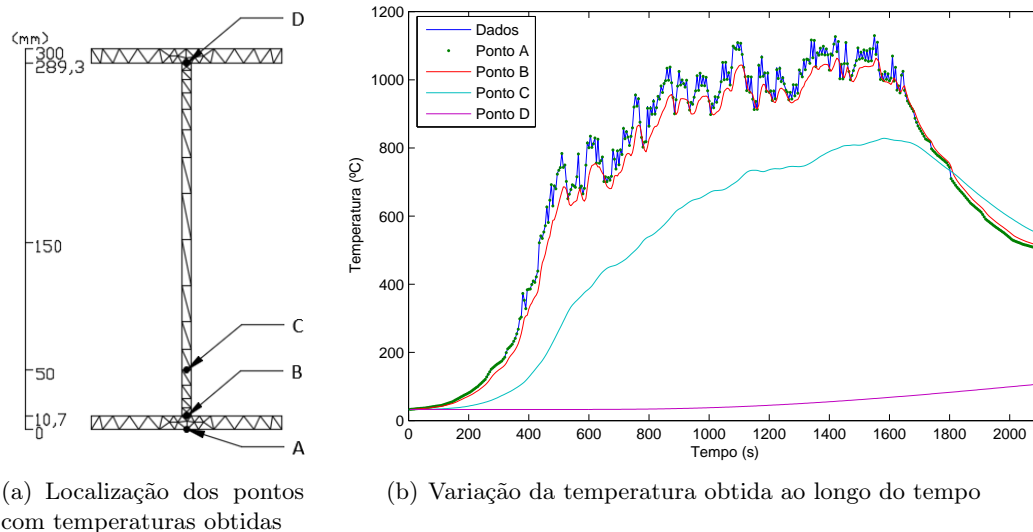


Figura 7.12: Campos de fluxos de calor q_x e q_y obtidos em $t = 18$ minutos

O gráfico na figura 7.13(b) indica os valores da temperatura calculados pelo modelo nos pontos A,B,C e D (figura 7.13(a)), a cada 5 segundos. Os valores de temperatura no ponto A conseguem recuperar bem os valores impostos nesta fronteira, sendo apresentados no gráfico em marcas verdes que coincidem com a linha azul que representa as temperaturas impostas.



(a) Localização dos pontos com temperaturas obtidas

(b) Variação da temperatura obtida ao longo do tempo

Figura 7.13: Variação da temperatura ao longo do tempo nos pontos A,B, C e D.

No ponto B verifica-se um acompanhamento das temperaturas com um atraso em relação ao ponto A, justificado pela velocidade de propagação da frente de calor. No ponto C, a 50 mm de distância do ponto A (cerca de um quinto da altura da alma), o aquecimento demora ainda mais tempo a ocorrer nos passos de tempo iniciais. No entanto, após a extinção do incêndio, verifica-se uma retenção de calor no ponto C a comparar com os pontos do banzo inferior da secção. Isto justifica-se pela combinação dos efeitos do aquecimento provocado pela propagação da frente de calor gerada nos passos de tempo iniciais, e do arrefecimento acentuado da fronteira inferior que ocorre nos passos de tempo finais.

O ponto D, sendo o mais afastado da fonte de calor, é pouco afectado pela mesma. Até ao fim da análise, verifica-se um aquecimento ligeiro e contínuo desta zona, sem se notar ainda o efeito do arrefecimento.

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho apresenta-se a formulação, implementação e validação dos elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura para problemas transitórios de condução térmica. Na formulação para o problema homogêneo, a solução é obtida no final dum intervalo de tempo. A formulação para o problema não homogêneo envolve duas etapas, com o objectivo de obter soluções para o final de cada passo de tempo definido. Na primeira etapa, o problema dinâmico original é reduzido a uma série de problemas espectrais não homogêneos definidos apenas no espaço. Na segunda etapa, cada um destes problemas é resolvido utilizando elementos finitos híbridos-Trefftz. A solução particular dos problemas espectrais não homogêneos é obtida aplicando uma variante inovadora do método da reciprocidade dual, que evita, ao mesmo tempo, a integração no domínio dos elementos e a presença de funções com expressões complicadas e/ou singulares na base da solução particular. A formulação é implementada na plataforma computacional *FreeHyTE*, tirando partido das rotinas e estruturas de dados pré-programadas que a mesma oferece. O programa resultante deste trabalho é de fácil utilização devido às interfaces gráficas intuitivas e será distribuído em regime Open Source, sob licença GNU-GPL.

De modo a provar a eficácia do programa computacional desenvolvido, foi realizada a análise numérica da convergência dos resultados para uma solução analítica não contida na base de aproximação. Conclui-se que os resultados convergem para a solução exacta, com o aumento dos graus das bases de aproximação e do passo de tempo escolhidos. A ordem de grandeza dos erros relativos obtidos é muito baixa para os modelos suficientemente refinados. Após a análise das soluções, é possível propor ao utilizador uma gama de valores que se podem adoptar para o refinamento p , h e Δt que possivelmente correspondem a uma escolha acertada.

O estudo da sensibilidade da malha à distorção serviu para mostrar a eficiência e robustez dos elementos finitos híbridos-Trefftz, quando confrontados com malhas muito distorcidas. Os resultados obtidos mostram que, para o problema homogêneo, os elementos finitos híbridos-Trefftz de temperatura são praticamente insensíveis à distorção da malha. Para problemas não-homogêneos existe uma maior insensibilidade dos resultados condicionada maneira como a solução particular é calculada. A proximidade dos pontos de colocação em elementos muito distorcidos leva à deterioração do condicionamento do respectivo sistema resolutivo e, por

consequência, das soluções do mesmo.

O caso de estudo de maior complexidade apresentado na secção 8.5 mostrou que o programa desenvolvido no presente trabalho é eficaz a resolver cálculos que envolvem frequências generalizadas elevadas, um grande número de elementos finitos, elevados gradientes da solução e um intervalo de tempo total bastante considerável (2100s divididos em 420 passos de tempo).

Desenvolvimentos futuros

Uma vez terminada esta dissertação, apresenta-se de seguida possíveis trabalhos futuros relacionados com este tema:

- Adaptação do algoritmo de refinamento p-adaptativo apresentado na referência [2] para problemas transitórios;
- Adaptação das formulações híbridas-Trefftz para a análise não linear de problemas de propagação de calor;
- Adicionar condições de fronteira de tipo Robin para modelar o efeito da transferência de calor por convecção.

Referências bibliográficas

- [1] *Approach to Tunnel Design for Fire Loads* : <http://tunnelingonline.com/tunnel-design-fire-loads/>.
- [2] Gerales, M. R. Elementos finitos híbridos-Trefftz 'p'-adaptativos para problemas de condução de calor. Master's thesis, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2016.
- [3] Silva, C. R. Desenvolvimento de formulações de elementos finitos para problemas de transferência de calor. Master's thesis, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2014.
- [4] Pereira, D. Elementos finitos híbridos com refinamento p-adaptativo para modelação de problemas de transferência de calor. Master's thesis, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2015.
- [5] *FreeHyTE - Structural HTD User's Manual V1.1 - CERIS, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, 2007.*
- [6] Silva, V. Elementos finitos híbridos-Trefftz de deslocamento para problemas de elasticidade plana. Master's thesis, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2016.
- [7] Sequeira, A. Elementos finitos híbridos-Trefftz de tensão para problemas de elasticidade plana. Master's thesis, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2017.
- [8] Argyris, J. Energy theorems and structural analysis: A generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations part i. general theory. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 27(2):42–58, 1955.
- [9] Zienkiewicz, O., Cheung, Y. Finite elements in the solution of field problems. *The Engineer*, pages 507–510, 1965.
- [10] Piteri, M. *Geração automática de malhas hierárquico-adaptativas em domínios bidimensionais e tridimensionais*. PhD thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 1998.
- [11] Trefftz, E. Ein gegenstück zum ritzschen verfahren. *2nd International Congress on Applied Mechanics*, pages 131–137, 1926.

- [12] Stein, E. Die kombination des modifizierten Trefftzschen verfahrens mit der methode der finiten elemente. *Finite Elemente in der Statik*, pages 172–185, 1973.
- [13] Jirousek, J. Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14(1):65–92, 1978.
- [14] Herrera, I. Boundary methods: A criterion for completeness. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 77(8):4395–4398, 1980.
- [15] Cismaşiu, C., Freitas, J. Formulation of hybrid-Trefftz displacement elements. *Advances in Finite Element Technology, Topping BHV (ed.) Civil-Comp Press, Edinburgh*, pages 195–202, 1996.
- [16] Freitas, J., Bussamra, F. Three-dimensional hybrid-Trefftz stress elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(5):927–950, 2000.
- [17] Cismaşiu, C., Freitas, J. Hybrid-trefftz displacement element for spectral analysis of bounded and unbounded media. *International Journal of Solids and Structures*, 40:671–699, 2003.
- [18] Freitas, J., Moldovan, I. D. Hybrid-Trefftz stress element for bounded and unbounded poroelastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85:1280–1305, 2011.
- [19] Freitas, J., Moldovan, I. D., Cismaşiu, C. Hybrid-Trefftz displacement element for bounded and unbounded poroelastic media. *Computational Mechanics*, 48:659–673, 2011.
- [20] Moldovan, I. D., Cao, D. T., Freitas, J. Hybrid-Trefftz elements for biphasic elastostatics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66, 2013.
- [21] Moldovan, I. D. *Hybrid-Trefftz elements for elastodynamic analysis of saturated porous media*. PhD thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, 2007.
- [22] Jirousek, J., Guex, L. The hybrid-Trefftz finite element model and its applications to plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986.
- [23] Cismaşiu, C. *The Hybrid-Trefftz Displacement Element for Static and Dynamic Structural Analysis Problems*. Phd thesis, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2000.
- [24] Piltner, I. Special finite elements with holes and internal cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(8):1471–1485, 1985.
- [25] Zienkiewicz, O., Zielinski, A. Generalized finite element analysis with t-complete boundary solution functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1985.

- [26] Jirousek, J., Qin, Q. Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis. *Computers & Structures*, 58(1):195–201, 1996.
- [27] Shaw, R., Huang, S., Zhao, C. The embedding integral and the Trefftz method for potential problems with partitioning. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9(1):83–90, 1992.
- [28] Wang, H., Qin, Q. Hybrid fem with fundamental solutions as trial functions for heat conduction simulation. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 22(5):487–498, 2009.
- [29] Leitão, V. On the implementation of multi-region Trefftz-collocation formulation for 2-d potential problems. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 20(1):51–61, 1997.
- [30] Freitas, J., Moldovan, I. D., Cao, D. T. Elastic wave propagation in unsaturated porous media using hybrid-Trefftz displacement elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97:32–67, 2014.
- [31] Moldovan, I. D. A new particular solution strategy for hyperbolic boundary value problems using Trefftz displacement elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102:1293–1315, 2015.
- [32] Nardini, D., Brebbia, C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Boundary Element Methods in Engineering*, pages 312–326, 1982.
- [33] Mayo, A. The fast solution of poisson’s and the biharmonic equations on irregular regions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21:285–299, 1984.
- [34] Wrobel, L. C., Brebbia, C. A. Boundary elements for non-linear heat conduction problems. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:617–622, 1988.
- [35] Fairweather, G., Karageorghis, A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advanced in Computational Mathematics*, 9:69–95, 1998.
- [36] Golberg, M. A., Chen, C. S. *Boundary Integral Methods: Numerical and Mathematical Aspects*, chapter The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. CMO/WIT Press, Boston, Southampton, 1998.
- [37] Cho, H. A., Golberg, M. A., Li, X., Muleshkov, A.S. Trefftz methods for time dependent partial differential equations. *Computers, Materials & Continua*, 1:1–37, 2004.
- [38] Yu, K. H., Kadarman, A. H., Djojodihardjo, H. Development and implementation of some bem variants, a critical review. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34:884–899, 2010.

- [39] Li, X., Chen, C. S. A mesh-free method using hyperinterpolation and fast fourier transform for solving differencial equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:1253–1260, 2004.
- [40] Agnantiaris, J. P., Polyzos, D., Beskos, D. E. Some studies on dual reciprocity bem for elastodynamics analysis. *Computational Mechanics*, 17:270–277, 1996.
- [41] Moldovan, I. D. A new approach to non-homogeneous hyperbolic boundary value problems using hybrid-Trefftz stress finite elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 69:57 – 71, 2016.
- [42] Moldovan, I. D., Radu, L. Trefftz-based dual reciprocity method for hyperbolic boundary value problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106:1043 – 1070, 2016.
- [43] Alves, C. J., Martins, N. F., Valtchev, S. S. Extending the method of fundamental solutions to non-homogeneous elastic wave problems. *Applied Numerical Mathematics*, 115:299–313, 2017.
- [44] Moldovan, I.D., Cismaşiu, I. *FreeHyTE: Theoretical bases and developer’s manual*, 2017.
- [45] Moldovan, I.D., Cismaşiu, I. *FreeHyTE: a Hybrid-Trefftz finite element platform*. Advances in Engineering Software. Under review, 2017.
- [46] *FreeHyTE Release Page*: <https://www.sites.google.com/site/ionutdmoldovan/freehyte>.
- [47] Chen, M., Rashed., Y. F. A mesh free method for linear diffusion equations. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 33:469–486, 1998.
- [48] Huang, H. C., Usmani, A. Finite element analysis for heat transfer. *Springer-Verlag, London*, 1994.
- [49] Freitas, J. Time integration and the Trefftz method. part i - first order and parabolic problems. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 10:453–463, 2003.

Apêndice A

Resíduos ponderados e colocação

Considere que o enunciado matemático dum problema físico é dado pela equação diferencial,

$$Du(x, y) - f(x, y) = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde D é um operador diferencial genérico, $u(x, y)$ é a solução procurada e $f(x, y)$ é um termo fonte. Para o problema de transferência de calor, D é o operador Laplaciano ∇^2 , $u(x, y)$ é o campo de temperaturas e $f(x, y) = -\frac{1}{k}Q(x, y)$.

O objetivo do método dos resíduos ponderados é encontrar uma solução aproximada $u(x, y) \simeq \tilde{u}(x, y)$ que minimize o erro de aproximação $R(x, y)$, chamado de resíduo e dado pela equação,

$$D\tilde{u}(x, y) - f(x, y) = R(x, y) \quad (\text{A.2})$$

A solução aproximada é tipicamente expressa como uma combinação linear de funções de aproximação $N_i(x, y)$,

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y)a_i \quad (\text{A.3})$$

onde a_i são os pesos das funções $N_i(x, y)$, que devem ser determinados.

Para minimizar o resíduo $R(x, y)$, impõe-se que o produto interno do mesmo com uma função arbitrária de ponderação deve ser nulo,

$$\int_{\Omega} W_i R(x, y) d\Omega = 0 \quad (\text{A.4})$$

Para determinar os pesos a_i , a equação (A.4) é imposta utilizando tantas funções de ponderação quantos pesos. A escolha de funções de ponderação é muito importante para a qualidade da solução aproximada do problema (A.1).

No capítulo 4 deste trabalho, utiliza-se o método de Galerkin, em que a própria base de aproximação (A.3) é utilizada como os pesos W_i para a ponderação (A.4).

Ao contrário das formas fracas, a colocação consiste em impôr que a solução aproximada seja igual à solução exacta em determinados pontos no domínio da equação (A.3), chamados de pontos de colocação.

Neste método é muito importante a escolha dos pontos para a colocação (x_j, y_j) , sendo os pesos dados pelas funções de Dirac δ_j ,

$$\delta_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, y) = (x_j, y_j) \\ 0, & \text{se } (x, y) \neq (x_j, y_j) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Pela equação (A.5) pode-se afirmar que o resíduo é nulo nos pontos discretos de colocação no domínio.

A vantagem deste método é que os pontos de colocação podem ser localizados de modo a controlar as zonas onde o erro da solução deve ser menor.

A desvantagem a nível de programação é assimetria de matriz dos coeficientes do sistema de colocação e o mau condicionamento do mesmo. Os erros entre pontos de colocação são elevados em comparação com os erros obtidos pelo método das formas fracas.

Apêndice B

Tabelas

B.1 Problema homogêneo

Tabela B.1: Resultados do erro relativo para vários testes ao modelo com malha rectangular.

w^2	n_D	n_Γ	1 elemento	4 elementos	16 elementos
-1	4	1	4,96E-04	5,13E-05	7,57E-06
-1	7	2	3,62E-05	2,24E-06	1,40E-07
-1	11	3	6,44E-07	2,07E-08	6,95E-10
-1	15	4	2,03E-08	3,10E-10	2,03E-10
-100	4	1	5,18E-01	1,43E-01	1,48E-02
-100	7	2	2,22E-01	2,46E-02	1,50E-03
-100	11	3	6,28E-02	3,10E-03	1,12E-04
-100	15	4	1,54E-02	3,73E-04	7,37E-05

Tabela B.2: Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -1.

η	$(n_D = 4, n_\Gamma = 1)$	$(n_D = 7, n_\Gamma = 2)$	$(n_D = 11, n_\Gamma = 3)$	$(n_D = 15, n_\Gamma = 4)$
10^{-1}	6,90E-04	3,23E-05	3,74E-05	1,98E-06
10^{-2}	1,01E-04	5,47E-05	6,50E-05	6,63E-06
10^{-3}	1,04E-03	5,47E-05	6,84E-05	7,39E-06
10^{-4}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,47E-06
10^{-5}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,47E-06
10^{-6}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,47E-06
10^{-7}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,48E-06
10^{-8}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,48E-06
10^{-9}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,48E-06
10^{-10}	1,05E-03	5,78E-05	6,88E-05	7,48E-06

Tabela B.3: Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -2.

η	$(n_D = 4, n_\Gamma = 1)$	$(n_D = 7, n_\Gamma = 2)$	$(n_D = 11, n_\Gamma = 3)$	$(n_D = 15, n_\Gamma = 4)$
10^{-1}	2,02E-03	1,67E-04	2,16E-04	2,70E-05
10^{-2}	2,96E-03	2,81E-04	3,74E-04	8,79E-05
10^{-3}	3,07E-03	2,96E-04	3,94E-04	9,78E-04
10^{-4}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,88E-05
10^{-5}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,89E-05
10^{-6}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,89E-05
10^{-7}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,89E-05
10^{-8}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,89E-05
10^{-9}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,89E-05
10^{-10}	3,08E-03	2,97E-04	3,96E-04	9,89E-05

Tabela B.4: Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -3.

η	$(n_D = 4, n_\Gamma = 1)$	$(n_D = 7, n_\Gamma = 2)$	$(n_D = 11, n_\Gamma = 3)$	$(n_D = 15, n_\Gamma = 4)$
10^{-1}	3,82E-03	4,42E-04	6,06E-04	1,19E-04
10^{-2}	5,59E-03	7,42E-04	1,05E-03	3,83E-04
10^{-3}	5,80E-03	7,80E-04	1,11E-03	4,26E-04
10^{-4}	5,82E-03	7,83E-04	1,11E-03	4,31E-04
10^{-5}	5,82E-03	7,84E-04	1,11E-03	4,26E-04
10^{-6}	5,82E-03	7,84E-04	1,11E-03	4,31E-04
10^{-7}	5,82E-03	7,84E-04	1,11E-03	4,31E-04
10^{-8}	5,82E-03	7,84E-04	1,11E-03	4,31E-04
10^{-9}	5,82E-03	7,84E-04	1,11E-03	4,31E-04
10^{-10}	5,82E-03	7,84E-04	1,11E-03	4,31E-04

Tabela B.5: Resultados dos erros de distorção para diferentes valores do coeficiente η e para frequência ω^2 igual a -4.

η	$(n_D = 4, n_\Gamma = 1)$	$(n_D = 7, n_\Gamma = 2)$	$(n_D = 11, n_\Gamma = 3)$	$(n_D = 15, n_\Gamma = 4)$
10^{-1}	6,00E-03	8,84E-04	1,27E-03	3,34E-04
10^{-2}	8,81E-03	1,48E-03	2,02E-03	1,08E-03
10^{-3}	9,14E-03	1,48E-03	2,32E-03	1,20E-03
10^{-4}	9,17E-03	1,56E-03	2,33E-03	1,21E-03
10^{-5}	9,18E-03	1,57E-03	2,33E-03	1,21E-03
10^{-6}	9,18E-03	1,57E-03	2,33E-03	1,21E-03
10^{-7}	9,18E-03	1,57E-03	2,33E-03	1,21E-03
10^{-8}	9,18E-03	1,57E-03	2,33E-03	1,21E-03
10^{-9}	9,18E-03	1,57E-03	2,33E-03	1,21E-03
10^{-10}	9,18E-03	1,57E-03	2,33E-03	1,21E-03

B.2 Problema não-homogêneo

Tabela B.6: Resultados do erro relativo para vários testes ao modelo com malha rectangular.

Δt (s)	n_c	n_p	n_Γ	1 elemento	4 elementos	9 elementos	16 elementos
0,40	4	1	1	1,00E-00	1,95E-01	9,06E-02	2,46E-02
0,40	5	2	2	1,23E-01	1,68E-02	9,60E-03	7,40E-03
0,40	6	3	3	5,26E-02	1,13E-02	7,50E-03	7,80E-03
0,40	9	6	5	1,11E-02	8,00E-03	8,00E-03	8,00E-03
0,25	4	1	1	1,00E-00	1,85E-01	9,12E-02	2,47E-02
0,25	5	2	2	1,20E-01	1,73E-02	9,90E-03	7,70E-03
0,25	6	3	3	5,37E-02	1,17E-02	7,70E-03	8,00E-03
0,25	9	6	5	1,10E-02	8,20E-03	8,20E-03	8,20E-03
0,20	4	1	1	1,00E-00	1,81E-01	9,42E-02	2,73E-02
0,20	5	2	2	1,18E-01	1,58E-02	8,00E-03	4,60E-03
0,20	6	3	3	5,25E-02	1,16E-02	4,20E-03	4,50E-03
0,20	9	6	5	6,00E-03	4,70E-03	4,70E-03	4,70E-03
0,10	4	1	1	1,00E-00	1,78E-01	1,03E-01	3,23E-02
0,10	5	2	2	1,17E-01	1,57E-02	7,80E-03	2,40E-03
0,10	6	3	3	5,45E-02	1,48E-02	8,98E-04	8,77E-04
0,10	9	6	5	1,19E-02	1,10E-03	1,10E-03	1,10E-03

Tabela B.7: Resultados do esforço computacional (em segundos) para vários testes ao modelo com malha rectangular.

Δt (s)	n_c	n_p	n_Γ	1 elemento	4 elementos	9 elementos	16 elementos
0,40	4	1	1	0,15	0,48	1,00	1,72
0,40	5	2	2	0,18	0,60	1,27	2,22
0,40	6	3	3	0,21	0,70	1,52	2,70
0,40	9	6	5	0,31	1,08	2,39	4,37
0,25	4	1	1	0,23	0,74	1,54	2,64
0,25	5	2	2	0,28	0,92	1,96	3,41
0,25	6	3	3	0,40	1,09	2,34	4,13
0,25	9	6	5	0,59	1,68	3,68	6,62
0,20	4	1	1	0,24	0,90	1,90	3,25
0,20	5	2	2	0,27	1,13	2,40	4,18
0,20	6	3	3	0,34	1,35	2,88	5,07
0,20	9	6	5	0,46	2,08	4,56	8,13
0,10	4	1	1	0,57	1,76	3,70	6,35
0,10	5	2	2	0,68	2,20	4,68	8,12
0,10	6	3	3	0,78	2,63	5,62	9,84
0,10	9	6	5	1,16	4,09	8,88	15,77

Apêndice C

Informação adicional da implementação do programa

C.1 Sistemas de referência

A compreensão dos sistemas de referência utilizados neste programa é fundamental para a implementação dos métodos de elementos finitos formulados.

Existem 5 referenciais utilizados neste programa, estes são o referencial global cartesiano (X,Y) , local cartesiano (x,y) , local polar (r,θ) , cartesiano da fronteira (n,t) e referencial da fronteira (s) .

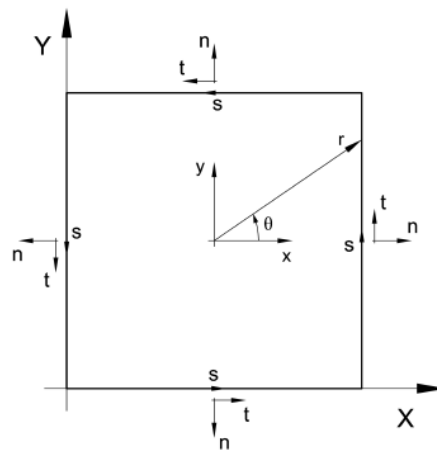


Figura C.1: Sistemas de referência. Fonte: [4].

A geometria da estrutura e as expressões paramétricas das fronteiras são definidas pelo referencial global cartesiano (X,Y) . Este referencial tem origem na extremidade inferior esquerda por defeito.

A geometria local de cada elemento é definida pelo referencial local cartesiano (x,y) , que tem origem no centróide do elemento e eixos paralelos ao referencial global.

As funções de aproximação no domínio dos elementos são definidas pelo referencial local polar (r, θ) , com a mesma origem do referencial local cartesiano e o eixo $\theta = 0$ coincidente com x .

Para a definição das condições de fronteira utiliza-se o referencial cartesiano de fronteira (n, t) , com origem no centro da fronteira, componente normal virada para fora do elemento e a tangencial a andar no sentido anti-horário, à volta do elemento.

Da mesma forma que a componente tangencial do referencial cartesiano de fronteira, o referencial de fronteira (s) tem o mesmo sentido, direcção e origem. Com o referencial de fronteira pode-se definir as funções de aproximação das fronteiras dos elementos e os pontos de Gauss-Legendre para integração numérica. Os valores s neste referencial variam de -1 a 1.

C.2 Estruturas de dados

De seguida são apresentados os dados de algumas estruturas fundamentais para a implementação do problema homogéneo, com as respectivas descrições de cada atributo.

Tabela C.1: Estruturas de dados de **Bconds** [2]

Bconds (atributos)	Descrição
BConds.Dirichlet	lista das fronteiras de Dirichlet
BConds.Neumann	lista das fronteiras de Neumann

Tabela C.2: Estruturas de dados de **Edges** e **Loops** [2]

Edges (atributos)	Descrição	Loops (atributos)	Descrição
Edges.nini	vector dos nós iniciais	Loops.nodes	matriz dos índices dos nós
Edges.nfin	vector dos nós finais	Loops.edges	matriz dos índices das fronteiras
Edges.parametric	matriz das coordenadas dos nós e comprimento da fronteira	Loops.center	matriz com o centróide do elemento
Edges.lleft	vector dos elementos à esquerda das fronteiras	Loops.area	matriz com a área dos elementos
Edges.lright	vector dos elementos à direita das fronteiras	Loops.material	matriz com características do material para cada elementos
Edges.type	indica 'D' se for Dirichlet e 'N' se for Neumann	Loops.order	vector da ordem das bases dos elementos
Edges.order	vector da ordem das bases das fronteiras	Loops.dim	vector da dimensão
Edges.dim	vector da dimensão da dimensão	Loops.insert	vector dos pontos de entrada no sistema
Edges.insert	vector dos pontos de entrada no sistema		

C.3 Funções do programa

Após a definição do problema na interface, a função **MainReg** ou **MainTri** chama as funções apresentadas de seguida pela ordem indicada. Esta função é responsável pelo pré-condicionamento e a gestão da chamada de funções de modo a resolver o sistema governativo.

Problema homogéneo

A estrutura de funções para o problema homogéneo é apresentada de seguida, sendo o sufixo **Reg** e **Tri** referente à malha triangular e regular:

- 1) **InputProcReg** ou **InputProcTri** - Geração e processamento das estruturas de dados topológicos provenientes dos campos preenchidos na interface gráfica, em alternativa pode-se preencher manualmente nesta função. Retorna à função **Main** as estruturas **BConds**, **Edges** e **Loops** e a matriz **Nodes**, com dimensão igual ao número de nós.
- 2) **CheckMinDegrees** - Verificação e correcção da indeterminação cinemática inicial. Recebe os graus das bases de aproximação e devolve à função **Main** as

estruturas **Edges** e **Loops** validadas.

- 3) **AssignParts** - Obtenção dos pontos de inserção e cálculo das dimensões das matrizes. Recebe as estruturas **BConds**, **Edges** e **Loops** e devolve as estruturas **Edges** e **Loops**, acrescidas das variáveis **insert** e **Dim**.
- 4) **gauleg** - Função de biblioteca - gera e devolve à função **Main** os vectores das abcissas e dos pesos de integração de Gauss-Legendre.
- 5) **Gen_D_Matrix** - Geração e alocação das sub-matrizes dos elementos na matriz dos coeficientes (**LHS**). Recebe as estruturas **Edges** e **Loops** e devolve à função **Main** a matriz **LHS** com as sub-matrizes calculadas.
- 6) **Gen_B_Matrix** - Geração e alocação das sub-matrizes das fronteiras na matriz **LHS**. Recebe as estruturas **Edges** e **Loops** e devolve a matriz **LHS** preenchida com as sub-matrizes calculadas.
- 7) **Gen_tg_Vector** - Geração e alocação dos vectores das temperaturas no vector livre (**RHS**). Recebe as estruturas **Edges**, **Loops**, o vector **RHS** iniciado, os vectores das abcissas e pesos de Gauss-Legendre e devolve o vector **RHS** preenchido.
- 8) **Gen_qg_Vector** - Geração e alocação dos vectores dos fluxos de calor no vector **RHS**. Recebe as estruturas **Edges**, **Loops**, o vector **RHS** iniciado, os vectores das abcissas e pesos de Gauss-Legendre e devolve o vector **RHS** preenchido.
- 9) Resolução do sistema - Obtenção do vector **X** da equação (4.32).
- 10) **ComputeFieldsReg** ou **ComputeFieldsTri** - Recebe as estruturas **Edges** e **Loops**, o vector **X**, a matrix **Nodes** e o vector das abcissas de Gauss-Legendre. Calcula os campos de temperatura e fluxos de calor e o seu armazena na estrutura **Loops**, devolvendo-a à função **Main**, e criação de um ficheiro para o TecPlot.
- 11) **PlotFieldsReg** ou **PlotFieldsTri** - Elabora a representação gráfica dos campos das soluções de temperatura e fluxos de calor obtidas. Recebe as estruturas **Edges** e **Loops**, a matrix **Nodes** e o vector das abcissas de Gauss-Legendre.

Problema não homogéneo

A estrutura de funções para o problema não homogéneo é apresentada de seguida, em que para o caso de uma malha regular o sufixo é Reg em vez de Tri:

- 1) **InputProcTri** - Recebe dados da interface e devolve as estruturas **Loops**, **Edges**, a matrix **Nodes** e o número de pontos de Gauss.
- 2) **TimeGenTri** - Recebe o tempo total, o passo de tempo da interface (5.5) e calcula a frequência generalizada, os campos iniciais nos pontos de Gauss e devolve um handle para o cálculo dos campos iniciais (**Ini**) e da fonte de calor (**heat**) para o

tempo corrente.

3) **gauleg**.

4) Obtenção dos pontos de inserção e dimensões das sub-matrizes:

4.1) **AssignPartsPart** - para a solução particular. Recebe a estrutura **Loops** e devolve a dimensão total do sistema e a estrutura **Loops** com as variáveis **dimP** e **insertP** adicionadas.

4.2) **AssignPartsCompl** - para a solução complementar. Recebe a estrutura **Loops** e **Edges** e devolve a dimensão total do sistema, a estrutura **Loops** com as variáveis **dimC** e **insertC** adicionadas e a estrutura **Edges** com a variável **dim** obtida.

5) **ComputeCollocationInitialFieldsTri** - Computação dos campos iniciais nos pontos de colocação. Recebe a matriz **Nodes** e a estrutura **Loops** e **Ini** e devolve os valores iniciais (temperatura **T0** e velocidade de temperatura **V0**) de cada ponto de colocação guardados na estrutura **Loops**.

6) **ComputeGaussInitialFieldsTri** - Computação dos campos iniciais numa grelha quadrada de lado igual ao número de pontos de Gauss. Recebe **Nodes**, **Loops**, **Ini** e o vector das abcissas de Gauss e devolve as variáveis da temperatura (**GT0**) e velocidade de temperatura (**GV0**) iniciais inseridas na estrutura **Loops**.

7) Geração e alocação das sub-matrizes na matriz **LHS**. Recebem **Edges**, **Loops**, a matriz **LHS** inicializada a zeros com a dimensão calculada, as abcissas e os pesos de Gauss.

7.1) **Gen_Dc_Matrix** - Devolve a matriz **LHS** com as sub-matrizes de cada elemento.

7.2) **Gen_Bc_Matrix** - Devolve a matriz **LHS** com as sub-matrizes de cada fronteira.

Início do loop para cada passo de tempo:

8) **Gen_LHS_MatrixTri** - Computação da matriz **LHS** para cada elemento. Tem tantas linhas quantos pontos de colocação, e tantas colunas quanto o número da dimensão da base dos elementos, resultando numa matriz rectangular, não quadrada. Recebe **Nodes**, **Loops** e **Dim** e devolve a matrix dos coeficientes construída.

9) **Gen_RHS_MatrixTri** - Computação do vector **RHS** inicial nos pontos de colocação dados pela quadratura de Gauss-Legendre. Recebe **Nodes**, **Loops**, **heat**, **Dim**, o instante de tempo, o passo de tempo e o parâmetro θ . Devolve o vector **RHS** com o termo fonte calculado.

10) Resolução da solução particular para cada elemento - obtenção de **X_p**.

11) Geração e alocação dos vectores no vector **RHS**, todos devolvem o vector **RHS** com os seus campos preenchidos:

11.1) **Gen_qg_Vector** - vector dos fluxos de calor. Recebe **Edges**, **Loops**, **BConds**,

o próprio vector **RHS**, as abcissas e pesos de Gauss e o tempo corrente.

11.2) **Gen_DpXp_Vector** - vector da solução particular para os elementos. Recebe **Edges**, **Loops**, **Xp** (vector da solução particular obtida), o vector **RHS**, as abcissas e pesos de Gauss.

11.3) **Gen_tg_Vector** - vector das temperaturas. Recebe **Edges**, **BConds**, o vector **RHS**, as abcissas e pesos de Gauss e o tempo corrente.

11.4) **Gen_BpXp_Vector** - vectores da solução particular para as fronteiras. Recebe **Edges**, **Loops**, **Xp**, o vector **RHS**, as abcissas e pesos de Gauss.

12) Resolução do sistema - obtenção de **X_c**.

13) **ComputeCollocationFieldsTri** - Recebe **Nodes**, **Loops**, **X_c**, **X_p**, o passo de tempo e θ . Calcula os campos de temperatura e fluxos de calor e o seu armazena na estrutura **Loops**.

14) **ComputeGaussFieldsTri** - Preparação dos campos de temperatura e fluxos de calor para representar graficamente, guardar na estrutura **Loops** e criar de um ficheiro para o TecPlot. Para tal, recebe **Nodes**, **Loops**, **X_c**, **X_p**, o passo de tempo, o tempo corrente, as abcissas de Gauss e o parâmetro θ .

15) **PlotFieldsTri** - Representação gráfica dos campos das soluções obtidas na grelha quadrada dos pontos de Gauss. Recebe **Nodes**, **Loops**, **Edges**, o passo de tempo e o tempo corrente.